有限変形問題に対する有限要素法の適用について

兵庫県土木部　正員　○前田昌俊
神戸大学　正員　桜井春輔

1．まえがき

構造解析における非線形問題は大別して材料非線形性と幾何学的非線形性とにわけられる。前者は材料の弾塑性挙動を取扱かうものでありすでに多くの論文が発表されている。しかし、そのほとんどは変形またはひずみが微小な場合に限定されている。一方、幾何学的非線形性は大きな変形またはひずみを対象とするものであり、有限変形理論の適用を受けるものである。しかしその解析範囲は現在のところ主として弾性変形に限定されている。

幾何学的非線形問題に有限要素法を適用する場合には種々の方法が考えられる。ここでは、それら種々の解析方法を述べ、簡単な計算例について計算結果を示し考察を行なう。

2．解析方法

(1)直接反復法：　これは全荷重を一度に構造物に作用させ、全変位を反復計算によって求めようとするものであり、いま、要素のひずみが小さいと仮定すれば材料の非線形性を取り扱かう場合とほゞ同様に線形計算のくり返しによって解を得ることができる。しかしひずみが大きい場合には、ひずみ－変位関係式は　$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}\,u_{k,j})$
としなければならず、最終的には多元高次代数方程式を解くことに帰着する。しかし、直接反復法は塑性解析のように応力履歴が問題となる場合には適用できず、また、問題によっては収束しないことがある。

(2)増分法：　これは荷重をいくつかの増分にわけて構造物に作用させ、それぞれの荷重増分に対して変位増分を計算し、全変位を求めるものである。この方法は材料の非線形性を考慮する場合に都合がよい。この場合にも、要素のひずみが大きい場合には非線形な方程式を解かねばならないが、ひずみ増分は一般に微小であり非線形な項を省略することができるであろう。　Hofmeister[1]らは平面問題に対する剛性方程式として次式を得ている。すなわち各要素に対して

$$(K_{ij}^{(G)}+K_{ij})\Delta r_j=\Delta f_i+\varepsilon_i \qquad (1)$$

ここで　$K_{ij}^{(G)}=\int_V \phi_{in,k}\,\sigma_{kl}^{(0)}\,\phi_{jn,l}\,dV$,　$K_{ij}=\frac{1}{4}\int_V(\phi_{ik,l}+\phi_{il,k})\,C_{klmn}\,(\phi_{jm,n}+\phi_{jn,m})\,dV$

$$\Delta f_i=\int_S \Delta T_k\,\phi_{ik}\,dS \ , \quad \varepsilon_i=\int_S T_k^{(0)}\phi_{ik}\,dS-\frac{1}{2}\int_V \sigma_{kl}^{(0)}(\phi_{ik,l}+\phi_{il,k})\,dV$$

$\sigma_{ij}^{(0)}$ は真応力，ϕ_{ik} は形状関数，$T_k^{(0)}$ は構造物表面に作用する表面力である。ただし物体力は省略してある。ここで K_{ij} は微小変形理論で求まる通常の増分剛性マトリックスであり、$K_{ij}^{(G)}$ は幾何学的増分剛性マトリックスである。なお、応力－ひずみ関係は $\Delta\sigma_{ij}=C_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl}$ と仮定している。ここで σ_{ij} は Kirchhoff の応力である。($\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(0)}+\Delta\sigma_{ij}$)．一方、瀬口[2]らも同様の剛性方程式を誘導しているが、ε_i は無視している。これは step N に対する荷重増分を与えるときの初期応力状態が釣合っているなら無視してもさしつかえないものであるが、有限変形の場合には初期応力は釣合っているとは

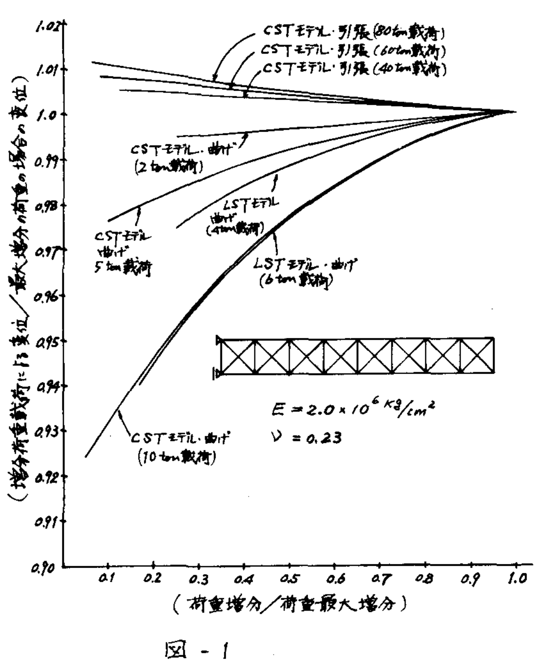
かぎらない。また、瀬口らは応力－ひずみ関係に $\Delta\sigma_{ij}^{(0)} = C^{*}_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}$ を用いた場合の剛性方程式も提案している。

3. 計算例

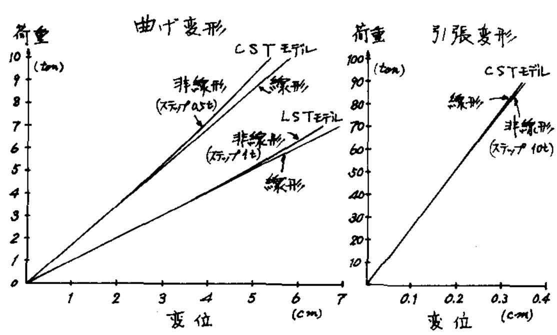
平面ひずみ状態における長さ 16^{cm}、高さ 2^{cm}、幅(奥行)1^{cm} の片持梁を考え、図-1のように三角形要素に分割する。その場合、三節点要素(CST)と六節点要素(LST)を用いる。載荷状態は曲げおよび単純引張とし、それぞれについて直接反復法と増分法によって計算を行なうことにする。直接反復法においてはひずみが小さい場合をZienkiewicz[3]の提案する方法で求め、また、ひずみの大きい場合は吉識らの提案する方法を用いた。一方、増分法においては最も簡単な場合として、まず(1)式における $K_{ij}^{(G)}$ および ε_i を無視した計算を行なった。計算結果の一部を図-1～2に示す。$K_{ij}^{(G)}$ を考慮した場合については現在プログラム開発中である。

4. 考察

直接反復法によって、要素のひずみが大きい場合を吉識[4]らの提案する反復法によって計算したが、この方法は非線形の項が無視できる程度に小さい場合にのみ収束し、実用的でない。一方、Oden[5]は古典的なNewton-Raphson法を用いることを提案している。著者らもこの方法での計算を計画している。ひずみが小さい場合には線形計算が可能であるが、解の精度および収束性に疑問があるように思われる。これらいずれの場合についても応力－ひずみ関係における応力を真応力(Eulerの応力)で表わすか、あるいはKirchhoffの応力を考えるかに問題が残される。一方、増分法においてはHofmeisterらが提案するように、反復のstepごとに釣合の照査をする必要があるように思われる。



図－1



図－2

参考文献

1) L.D. Hofmeister　AIAA/ASME 11th Structures, Structural Dynamics & Materials Conference　1970
2) Y. Seguchi, A. Sinda　paper presented at 20th Japan Cong. of Appl. Mech.　1970
3) O.C. Zienkiewicz　The finite element method in structural and continuum mechanics　McGraw.
4) 吉識ら　日本造船学会論文集 第123号
5) J.T. Oden　Proc. of ASCE, vol. 93 ST3, 1967