

連続斜めPC板の解析

大阪工業大学

正員 岡村宏一

大阪設計コンサルタンツKK

正員 ○ 島田 功

1. まえがき; PC板構造の設計上の向題として、板がケーブルによってプレストレスされる場合、ケーブルの緊張によって板に生ずる曲げ、および面内力は、ケーブルが比較的扁平な放物線の場合でミースとの摩擦を無視すれば、図-1に示すような定着面に作用する鉛直および水平方向の分布力、および腹圧力の組み合わせとなる。

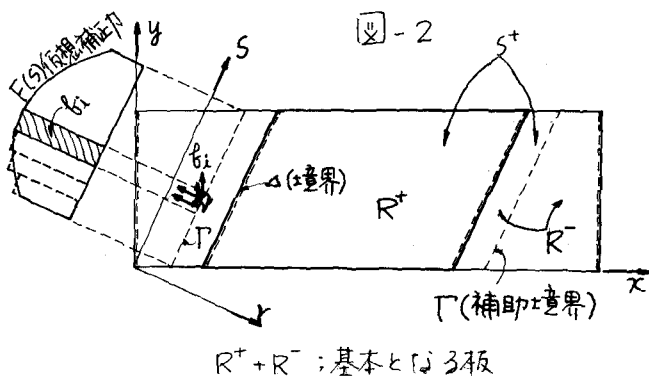
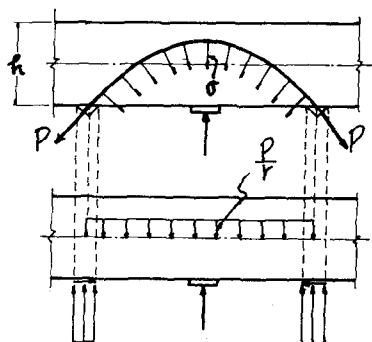
すてに、このようなプレストレス力による板としての特性を考慮に入れた若干の報告がある。本報では、さらに斜め境界の影響、および中間支承条件等による応力特性を忠実に評価できる解法についてのべる。

斜め境界に関する研究は、斜めスラブ橋の問題と関連して少なくない。その一般的数値解析法として、差分法、有限要素法が考えられるが、それらは *field equation* を近似的にしの満足せず、また未知量を

境界および内部に設ける方程式系を導くので連立方程式の元数が大きくなる。このような見地から、既報の、*field equation* に厳密に従い、未知量を境界に沿って設ける境界選定調整法を、ここでも一貫して用いる。すなわち図-2において、実際の境界(Δ)を作るような仮想補正力(F)の分布を

補助境界 Γ に沿って定めることにより *field R^+* を作成する。かかる仮想補正力の分布を、計算に便利な有限な数の階段分布鉛直力、および水平力、さらにモーメントで仮定すれば、板は有限個の矩形ブロック力と外荷重とか作用した力学系となる。各矩形ブロック力による板の任意点における影響係数は矩形の大きさ

図-1



[1] 倉田, 岡村, 谷平: 「連続プレストレス板の解析」 (土木学会, S43.10)

[2] 倉田, 岡村, 谷平, 堀川: 「プレストレス斜板の解析」 (土木学会関西支部 S44.5)

[3] 倉田, 岡村, 谷平, 進藤: 「斜め配置を持つ連続PC床板橋の応力特性について」 (土木学会 S44.9)

[4] 岡村, 島田: 「斜合成桁橋の立体解析」 (土木学会, S45.11)

[5] R.A. Oliveira "Plane Stress Analysis by a General Integral Method" (A.S.C.E. EM1, 1968 pp79~108)

と位置によって、一般に2重級数であらわされるが、総和公式による単級数への変換により、個々に十分な収束値が得られる。仮想補正力分布を小さなブロックの集合と考える近似は \$S^+\$ において解析連続であるから、ブロック数を増やすことによって十分な精度で境界 (\$\Delta\$) を作る事ができる。

2. PC板の基礎方程式

i) 緊張力による板の曲げに対する基礎方程式

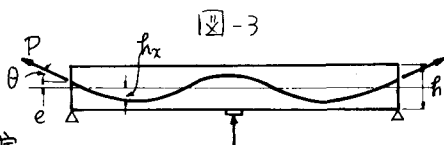
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^4} = - \left[P_x \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial P_x}{\partial x} \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} h_x \right] - \left[P_y \frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial P_y}{\partial y} \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} h_y \right] \quad (1)$$

ここで \$P_x, P_y\$ はそれぞれ \$x, y\$ 方向の緊張力, \$h_x, h_y\$ は中立面よりケーアル軸までの偏心距離

ii) 緊張力による板の Scheibe Action に対する基礎方程式

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial P_y}{\partial y} dy \right\} - \nu \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2)$$

ただし、\$w\$: たわみ \$\phi\$: 応力関数 \$\nu\$: ポアソン比、式(1), (2)の詳細は文献[1]参照
 シースとケーアルとの摩擦を無視すれば緊張力は一定となり、式(1)においては[]内第1項のみとなり、式(2)右辺は0となる。



Scheibe Action は図-3において、緊張力 \$P\$ が一定

ならば、その水平合力を境界面内力と考える

$$\phi = - \frac{P \cos \theta}{2h} y^2 \quad \text{すなわち} \quad \sigma_x = - \frac{P}{h} \cos \theta, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3)$$

とおくことができる。また板の曲げについては、ケーアルの曲率が板に与える腹圧力、

\$q = -P \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2}\$ および締結部における緊張力 \$P\$ の中立面との偏心 \$e\$ によるモーメント

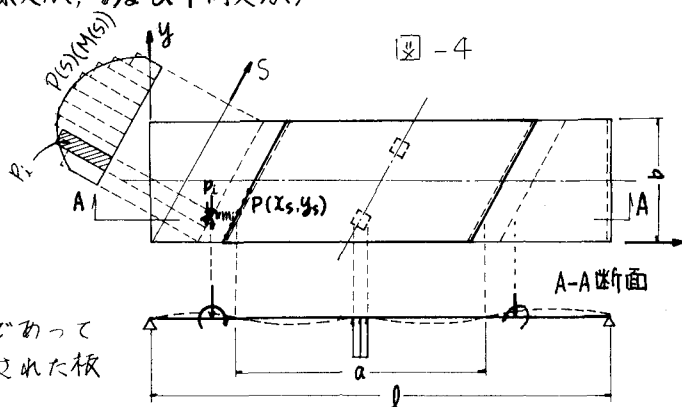
\$M = P e \cos \theta\$ が考慮される。

3. PC板の境界条件(斜め線支承, および中間支承)

図-4に示すような相対自由辺を持ち他の2辺が解析困難な斜め境界を持つ場合、問題の平板の占有する領域が \$0 \leq x \leq l\$, \$0 \leq y \leq b\$ とし、平板内任意点のため \$w\$ を

$$w = w_1 + w_2 \quad (4)$$

で示す。式(4)の \$w_1\$ は荷重項であって、\$x=0, x=l\$ の2辺で単純支持された板として容易に求められる。



さて、式(4)中 \$w_2\$ は境界調整のための仮想補正力(ブロック荷重の集合)による項である。

一般形を次のように与える。 $w_2 = \sum_i \sum_j \sum_k f_{ijk} w_{0ijk}$ ここで、\$f_{ijk}\$ は不定常数で、仮想補正力 (\$P_{ij}, m_{ij}, q_{ij}\$) の強度を表わす。従ってかかるため影響係数 \$w_{0ijk}\$ は次のように与えられる。任意点 (\$x=x_0, y=y_0\$) に集中荷重 \$P_0\$ を受ける場合の解

$$w_{p0} = \frac{4P_0}{Dab} \sum_m \sum_n \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \left[\sin \beta_n y + \frac{E_m(y)}{\alpha_m^3 \theta_m} \{ \beta_n + (2-\nu) \alpha_m \} \beta_n^2 \right] \sin \beta_n y_0 \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_m x \quad (5)$$

ただし D : 板の曲げ剛度 $\alpha_m = \frac{m\pi}{l}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ $E_m(y)$, θ_m は文献 [6] 参照 図-5

式 (5) の (n) についての総和を取れば

$$w_{p0} = \frac{2P_0}{D\pi^4} \sum_m \left\{ \frac{b^3}{a} (\zeta_{m1}'' - \zeta_{m2}'') + \frac{2\pi^3}{a} \{ \zeta_{m1}^{IV} + (2-\nu) \lambda^2 m^2 \zeta_{m1}'' \} \frac{E_m(y)}{\alpha_m^3 \theta_m} \right\} \sin \alpha_m x_0 \sin \alpha_m x \quad (6)$$

ただし

$$\begin{cases} \zeta_{m1}'' - \zeta_{m2}'' = \sum_n \frac{1}{(n^2 + \lambda^2 m^2)^2} \{ \cos \beta_n (y_0 - y) - \cos \beta_n (y_0 + y) \} \\ \zeta_{m1}'' = \sum_n \frac{n}{(n^2 + \lambda^2 m^2)^2} \sin \beta_n y_0 \\ \zeta_{m1}^{IV} = \sum_n \frac{n^3}{(n^2 + \lambda^2 m^2)^2} \sin \beta_n y_0 \end{cases}$$

式 (6) を基本とし、図-6 に示される荷重系に対する基本式は図-5 の座標関係

$$x_0 = \kappa r_0 + \mu s_0, \quad y_0 = \kappa s_0 - \mu r_0 \quad (7)$$

$$\text{ただし } \kappa = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cos \theta, \quad \mu = \kappa \tan \theta$$

を用いることにより、

$$\text{i) 斜め線荷重 } w_{p,ij} = \int_{s_{ij}-\delta s_{ij}}^{s_{ij}+\delta s_{ij}} w_{p0} ds_0 \quad (8)$$

$$\text{ii) 斜め線モーメント } w_{m,ij} = \frac{\partial}{\partial r_0} \int_{s_{ij}-\delta s_{ij}}^{s_{ij}+\delta s_{ij}} w_{p0} ds_0 \quad (9)$$

$$\text{iii) 斜め部分分布荷重 } w_{q,ij} = \int_{r_{ij}-\delta r_{ij}}^{r_{ij}+\delta r_{ij}} \int_{s_{ij}-\delta s_{ij}}^{s_{ij}+\delta s_{ij}} w_{p0} ds_0 dr_0 \quad (10)$$

より求められる。

図-4 を参照して斜線境界の単純支持条件は、 $S = S_5$ 上に選ばれた選点 $P(x_s, y_s)$ に注目し P 点における板の

$$w_1(x_s, y_s) + w_2(x_s, y_s) = 0, \quad \Delta w_1(x_s, y_s) + \Delta w_2(x_s, y_s) = 0 \quad (11)$$

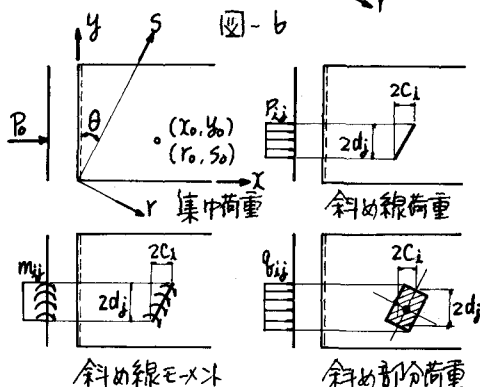
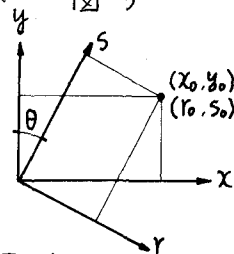
$$\text{ただし } \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

一方中間支承の点 (x_0, y_0) において

$$w_1(x_0, y_0) + w_2(x_0, y_0) = 0 \quad (12)$$

さて、斜境界に n 個の選点、また m 個の中間支承を採った場合 式 (11), (12) の条件式は $2n+m$ 元の連立一次方程式となり、これを解いて $2n$ 個の P_{ij}, m_{ij} と m 個の q_{ij} を求め、たわみ、断面力を求めることができる。

[6] 岡村：「板と Beam 系の合成構造の立体解析法、ならびに板と格子桁の合成による橋梁解析への応用」(土木学会 S43.10)



4. 計算例 解法の妥当性を検討する基本的な例題として図-7に示すようなZ方向に一樣な プレストレッシングされた連続PC斜板について計算を行った。この場合、 $a=4b$ 、斜角 $\theta=30^\circ$ 、 $\nu=0.2$ である。選点として6等分点 $P_1 \sim P_6$ を選び選点最小自乗法を採用した。

ケーブルの形状は2次放物線とし締結部にモーメントは作用しない配置とする。

図-8に腹圧力によるモーメント M_x, M_y を示した。図-9に等分布荷重がのった場合のモーメント M_x, M_y を、また図-10に境界調整の精度を w 、および Δw について示した。モーメント M_x については、梁理論によるものを破線で示し、比較を行った。 M_y については、鈍角部の附近に集中現象が見られる。また、最大応力は、支承線上より、むしろ中央線上に発生している。

5. あとがき

解析困難な斜め境界を持つPC板に対する境界調整法の適用について述べ、1つの例を示した。かかる境界調整法を用いる場合は方法が単純であり、電子計算機を用いることにより比較的簡易に計算を行うことができる。なお、図示した計算例において、境界調整の精度は、たわみについては問題ない。また、 Δw について、鋭角側のコーナの附近の誤差が幾分大きいが、この附近の調整力をいくらか密にすれば解決できると考えている。

しかしこの部分は鋭角の頂点であり影響は僅少である。また誤差は $\oplus, \ominus$ 交互に変化しており、選点間隔以上離れた所においては、サンアノンの原理が有効に利用されるものと思われる。なお、種々なPC斜板について、主応力を含む応力特性の調査を続行しているが、機会があれば報告したい。今回は一方向のプレストレス力による計算を示したが、横締についてのプログラムも検討中である。

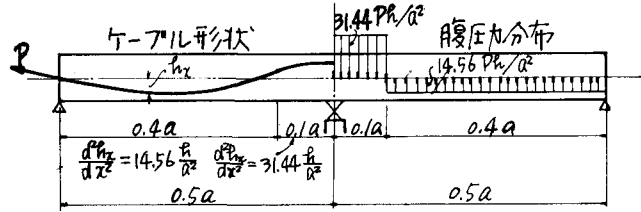
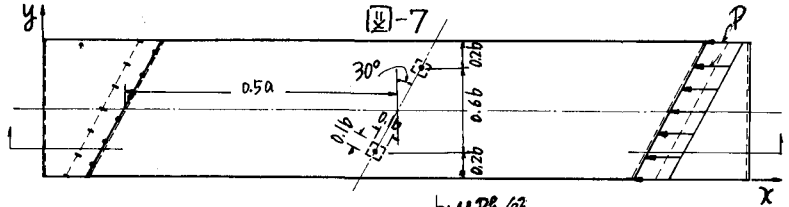


図-8 PC緊張力によるモーメント

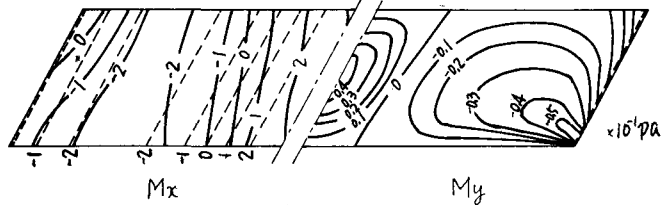


図-9 等分布荷重によるモーメント

