

長方形薄鋼板の弾塑性座屈の解析

大阪工業大学

正員 岡村宏一

大阪設計コンサルティングKK

正員 ○吉田公恵

1. はじめに；長方形薄鋼板の後座屈領域の挙動について、最近 かなりの研究例がみられる。特に、非線形弾性領域に関しては、周辺に軸力、曲げ、せん断を受ける各種の場合について、たとえば、Von Kármánの非線形弾性理論にもとづいた、M. Stein¹⁾、N. Yamaki²⁾、E. Watanabe³⁾、M. Skaloud⁴⁾らの研究がある。しかし、非線形弾性領域からさらに、弾塑性領域に転移してゆく過程について解析したものは、目下のところ、数少ないようであり、また、板内に降伏領域が発生すれば、外力の種類、初期変形によって、かなり異なった性格の挙動を示すと思われる、力学上興味のある問題である。

筆者らはすでに、大たわみを併う長方形薄鋼板、およびリブ付き板の弾塑性曲げの問題に対する1解法を発表した^{5), 6)}。この解法においては、非線形の釣合い、ならびに適合条件式の取り扱いに関して、大たわみ、塑性変形に伴う物理量は、板内点を囲む比較的小さい有限領域で平均値を持つものとみなして、それらの解を十分な収束性をもつ連続解で与えた。その結果、たとえば、等分布荷重を受ける弾性大たわみの解の精度については、有限領域を5×5分割で与える程度で、A. K. Basu らの12×12 meshの有限差分法による収束値と一致する収束性を示した。なお、局所的な性格が強くなる弾塑性挙動の推移に関しても、塑性解析による基本的なdataとの比較によって十分な精度を持つことを確認しており、また、選点法の併用によって、境界条件に対する適応性の拡張、リブとの完全合成の問題なども比較的容易に解決できる。この事実は、本解法を立体構造などのより広域な問題に付して拡張できる可能性を示唆している。

さて、本文は、この解法を、弾塑性座屈の問題に統一して適用することを目的に行なっている研究の基礎的段階の報告である。この問題について、境界条件、リブとの合成条件、⁵⁾板内点の降伏条件の定義と関連して、塑性変形理論、あるいは塑性流れ理論の適用の妥当性など、種々の問題点があるが、ここでは、Ilyahin, Rosenblum らの近似降伏面を用いた塑性流れ理論にもとづき、周辺に軸力を受ける場合の解式、計算例について述べる。

- 1) Stein M., Loads and deformation of buckled rectangular plates, Tech. Report, R-40, Langley Research Center, 1959
- 2) Yamaki N., Post buckling behavior of rectangular plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. A. M., A. S. M. E. Vol. 26, 1959
- 3) Watanabe E., Lee Ti-Ta, A method of analysis of webplates with large deflection. 土木学会論文報告集, 183, 1970
- 4) Skaloud M., Donea J., Massonet Ch., Post-critical behaviour of a stiffened square plate subjected to uniform shear, Publications, Vol. 27, I. A. B. S. E 1968,
- 5) 岡村, 吉田, Membrane Action を有する矩形板の弾塑性解析, 土木学会講演概要 I, 1970,
- 6) 岡村, 吉田, 進藤, リブ付き板の弾塑性立体解析, 同上,
- 7) Basu A. K., Chapman J. C., Large deflection behaviour of transversely loaded rectangular orthotropic plates, Proc. of Institution of Civil Eng. Vol. 35, 1966

2. 板の基礎式とその解の誘導；

板のたわみを w , 初期にたわみを w_0 , 曲げ剛度 $\left[= \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \right]$, E : 弾性係数, ν : ポアソン比, h : 板厚, 曲げモーメントおよび軸力の Component を $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$, で表わし, 応力関数中, 中央面における塑性ポテンシャル f , を導入すれば, 板の基礎式は次のように書かれる。

$$\Delta \Delta w = \frac{h}{D} \pi(x, y) - \frac{4}{h} \int_0^t \psi(x, y) dt \quad \text{----- (1)}$$

$$\Delta \Delta \phi = E \left[\Lambda(x, y) - \int_0^t \Gamma(x, y) dt \right] \quad \text{----- (2)}$$

式中, $\pi(x, y), \Lambda(x, y)$, は膜作用に関する項であり,

$$\pi(x, y) = \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial y^2} \right\} \quad \text{----- (3)}$$

$$\Lambda(x, y) = \left\{ \left(\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y^2} \right\} \quad \text{----- (4)}$$

また, 時間 t に関する積分項は塑性変形に從属する項であり, 塑性ポテンシャル,

$$f = m_x^2 + m_y^2 - m_x \cdot m_y + 3m_{xy}^2 + n_x^2 + n_y^2 - n_x \cdot n_y + 3n_{xy}^2 \quad \text{----- (5)}$$

$$m_x = \frac{M_x}{M_P}, m_y = \frac{M_y}{M_P}, m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_P}, n_x = \frac{N_x}{N_P}, n_y = \frac{N_y}{N_P}, n_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_P}, M_P = \frac{\sigma_P}{4} h^2, N_P = \sigma_P \cdot h$$

σ_P : 降伏応力

に關して, 時間積分を荷重段階の和に置換して次のように書かれる。

$$\int_0^t \psi(x, y) dt = \sum_j \{ \psi(x, y) \}^j, \quad \psi(x, y) = \frac{1}{M_P} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu M) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu M) + 6(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu M_{xy}) \right\} \quad \text{--- (6)}$$

$$\int_0^t \Gamma(x, y) dt = \sum_j \{ \Gamma(x, y) \}^j, \quad \Gamma(x, y) = \frac{1}{N_P} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu N) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu N) - 6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu N_{xy}) \right\} \quad \text{--- (7)}$$

$$M = (2-\nu)M_x - (1-2\nu)M_y, M' = (2-\nu)M_y - (1-2\nu)M_x, N = 2N_x - N_y, N' = 2N_y - N_x$$

ここで, j は荷重の Step, μ は plastic tensor の intensity である。次に断面力は, 以下のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{4D}{h M_P} \sum_j (\mu M)^j, & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{4D}{h M_P} \sum_j (\mu M)^j \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{12D}{h M_P} (1-\nu) \sum_j (\mu M_{xy})^j, & N_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, & N_y &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & N_{xy} &= -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (8)}$$

非線形方程式；

(1), (2) の解, w , 中
は文献(5)の解法

に基づき, 図-1
に示すように塑性
変形の從属関数
 $\psi(x, y), \Gamma(x, y)$, およ
び膜力の從属関数
 $\pi(x, y), \Lambda(x, y)$ の近似
分布を考えて,

Fourier級数による

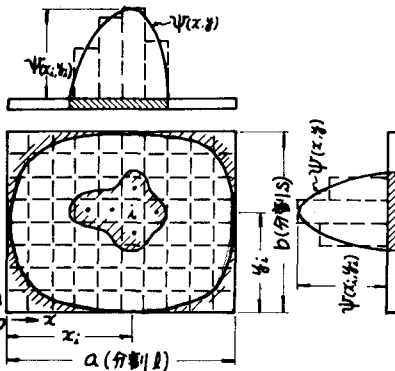


図-1(a) 塑性域と塑性変形 $\psi(x, y)$ の近似
($\Gamma(x, y)$ も同様に近似される)

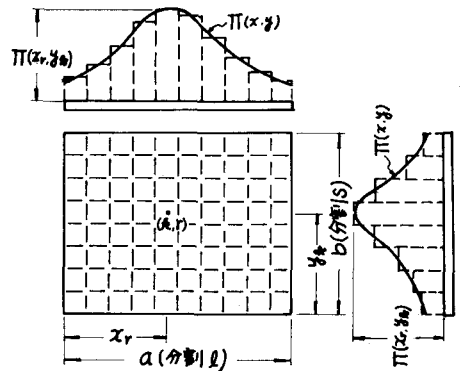


図-1(b) 膜作用の從属関数 $\pi(x, y)$ の近似
($\Lambda(x, y)$ も同様に近似される)

連続解として求められる。

複雑な周辺条件を有する矩形板の解析は、周辺上に境界調整力として、軸方向力、 $P_x(y_k)$, $P_y(x_r)$ 水平方向力 $t_y(y_k)$, $t_x(x_r)$, およびモーメント $M_x(y_k)$, $M_y(x_r)$, を図-2に示すような矩形分布形で与え、各矩形分布の中心に採った選点において、周辺条件

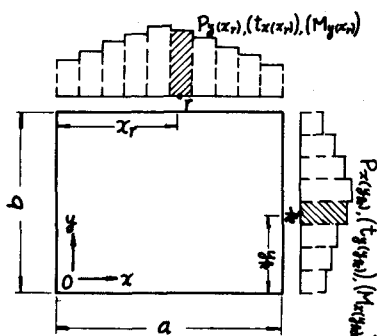


図-2

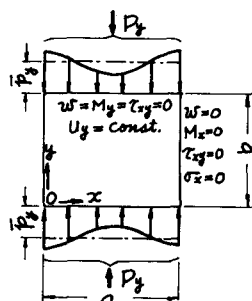


図-3

を成立させる手法を併用する。この手法を併用することによって、任意の周辺条件を有する矩形板の弾塑性座屈の解析を比較的容易に行なうことができる。

本文では図-3に示すように一方向(y方向)に軸力 P_y を作用させ、板の周辺条件として、 $x=0, a$ 辺において、 $w=M_x=t_{xy}=0$, $y=0, b$ 辺において、 $w=M_y=t_{xy}=0$, $u_y=const.$, なる条件を与える。これらの周辺条件を満たすための調整力として、 $P_x(y_k)$, $P_y(x_r)$ を用いると、 w, ϕ は、次のように表わされる。

$$w(u,v) = \frac{16a^4}{\pi^2} \left[\frac{h}{D} \sum_r \sum_f \pi^j(x_r, y_k) \bar{\Omega}_{Rr}(u,v) - \frac{4}{h} \sum_i \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} \psi^k(x_i, y_i) + \psi^j(x_i, y_i) \right\} \bar{\Omega}_i(u,v) \right] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \phi(u,v) = & \frac{16a^4}{\pi^2} E \left[\sum_r \sum_f \lambda^j(x_r, y_k) \bar{\Omega}_{Rr}(u,v) - \sum_i \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} \Gamma^k(x_i, y_i) + \Gamma^j(x_i, y_i) \right\} \bar{\Omega}_i(u,v) \right] \\ & - \frac{8a^2}{\pi^2 \lambda} \left[\sum_r P_x(y_k) \bar{\Omega}_{Rr}(u,v) + \sum_f P_y(x_r) \bar{\Omega}_f(u,v) - \frac{1}{2} \bar{P}_y u^2 \right] \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \bar{\Omega}_{Rr}(u,v) &= \sum_m \sum_n \frac{\sin \alpha_m x_r \sin \beta_n y_k}{m \cdot n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2l} \sin \frac{n\pi}{2s} \sin \alpha_m u \sin \beta_n v \\ \bar{\Omega}_{Rr}(u,v) &= \sum_m \sum_n \frac{\cos \alpha_m x_r \cos \beta_n y_k}{m \cdot n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2l} \sin \frac{n\pi}{2s} \cos \alpha_m u \cos \beta_n v \\ &+ \frac{\pi}{4l} \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_r}{m^5} \sin \frac{m\pi}{2l} \cos \alpha_m u + \frac{\pi}{4s\lambda} \sum_n \frac{\cos \beta_n y_k}{n^5} \sin \frac{n\pi}{2s} \cos \beta_n v \end{aligned}$$

$$\bar{\Omega}_{Rr}(u,v) = \sum_n \frac{1}{n^2} \frac{1}{(1 + \lambda n \pi \bar{\Delta}_0)} \left[\varepsilon_u - \frac{u}{a} \eta_u + \frac{1}{\lambda n \pi} \zeta_u \right] \sin \frac{n\pi}{2s} \cos \beta_n y_k \cos \beta_n v$$

$$\bar{\Omega}_f(u,v) = \sum_m \frac{1}{m^2} \frac{1}{(1 + \frac{1}{\lambda} m \pi \bar{\Delta}'_0)} \left[\varepsilon'_r - \frac{v}{b} \eta'_r + \frac{\lambda}{m \pi} \zeta'_r \right] \sin \frac{m\pi}{2l} \cos \alpha_m x_r \cos \alpha_m u$$

$$\bar{\Delta}_0 = \operatorname{cosech} \lambda n \pi, \quad \varepsilon_u = \bar{\Delta}_0 \cdot \cosh \beta_n u, \quad \eta_u = \bar{\Delta}_0 (\cosh \lambda n \pi - 1) \sinh \beta_n u - \cosh \beta_n u$$

$$\zeta_u = \bar{\Delta}_0 (1 - \cosh \lambda n \pi) \cosh \beta_n u - \sinh \beta_n u, \quad \bar{\Delta}'_0 = \operatorname{cosech} \frac{1}{\lambda} m \pi, \quad \varepsilon'_r = \bar{\Delta}'_0 \cdot \cosh \alpha_m v$$

$$\eta'_r = \bar{\Delta}'_0 (\cosh \frac{1}{\lambda} m \pi - 1) \sinh \alpha_m v - \cosh \alpha_m v, \quad \zeta'_r = \bar{\Delta}'_0 (1 - \cosh \frac{1}{\lambda} m \pi) \cosh \alpha_m v - \sinh \alpha_m v$$

なお、 $\bar{\Omega}_i(u,v)$, $\bar{\Omega}'_i(u,v)$ は $\bar{\Omega}_{Rr}(u,v)$, $\bar{\Omega}_{Rr}(u,v)$ と同形で表わされる。ただし $\bar{P}_y$: 平均応力, a, b : 板の辺長, $\lambda = a/b$, $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, j : 逐次計算における荷重段階, (u,v) : 板内任意点の座標である。これら $\bar{\Omega}, \bar{\Omega}'$ 中、2重級数項は総和公式により単級数に変換し、十分な収束値を与えることができる。

(9), (10), 式に含まれる $\psi^k(x_i, y_i)$, $\Gamma^k(x_i, y_i)$ は、塑性化した i 点ならびに周囲の8点の断面力を与えれば、差分法によって μ の代数関数として与えられる。(文献(5)参照)

次に周辺変位 $u_x(x=0,a)$, $u_y(y=0,b)$ は以下のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} u_x(x=0,a) &= \int_0^a \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(w+u_0)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{N_p} \sum_j (\mu N_j)^2 \right] dx \\ u_y(y=0,b) &= \int_0^b \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(w+u_0)}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{N_p} \sum_j (\mu N_j)^2 \right] dy \end{aligned} \right\} \text{---(11)}$$

(11)式の計算には和介法を併用する。(9),(10)式の $\Omega, \bar{\Omega}$ および(8),(11)式に含まれる $\Omega, \bar{\Omega}$ の微分形は、逐次計算において、input data として与えられる。

3. 周辺条件式; (9),(10)式で与えられる解式は、 $P_y(x), P_z(y)$ の値にかかわらず、 $x=0, a$ 辺において、 $w=M_x=T_{xy}=0$, $y=0, b$ 辺において、 $w=M_y=T_{xy}=0$ を満足している。したがって周辺条件式は、 $x=0, a$ 辺に採った選突 (y_0) において、 $G_x(y_0)=0$, また $y=0, b$ 辺において、 $u_y=\text{const}$ および、 $\sum P_y(x)=0$ で与えられ、 $P_z(y_0), P_y(x_0)$ を定める連立方程式を形成する。

4. 降伏条件ならびに逐次計算の方法; 塑性化した点の降伏条件は、 $f_i=1$ である。 $f_i < 1$ なる場合は弾性経路上にあり、この時点では $\mu=0$ である。逐次計算ならびに、降伏条件の線形化の方法は、文献(5)の方法に準ずる。

5. 計算例; 計算例として、図-4に示す、1辺に圧縮力を受ける、正方形板を扱った。境界条件は、3. で述べた通りである。

板厚、ならびに、降伏応力の影響を調べるため、図に示す2種の板厚と、降伏応力 ($=3200 \text{ kg/cm}^2, 4600 \text{ kg/cm}^2$) を与えた。また図-5の結果は、初期ためめ $w_0 = \frac{h}{20} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ (sin形、板中央の値は板厚の $1/20$) の場合である。

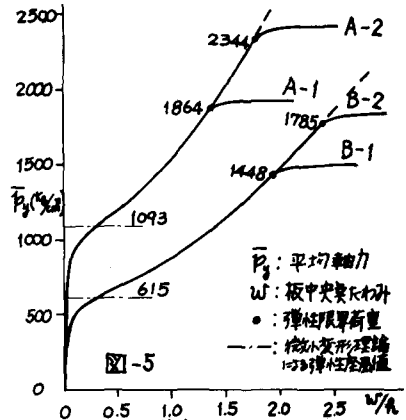
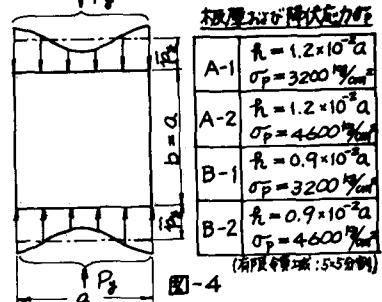
この計算例の範囲での傾向を述べると、表-1にみるように、弾性限界荷重と微小変形理論による弾性座屈荷重の比は、板厚比 (h/a) が小さいほど大きくなっている。一方本例では、降伏応力と弾性限界荷重との相関関係に、板厚の影響があまり表われない。降伏応力の50%増加に対して、弾性限界応力は、双方とも、25%程度の増大を示している。

また本例は、1対辺に軸圧縮を受け、それと直角方向の膜力に対する端部拘束がない場合であるが、非線形弾性域から弾塑性領域へ転移する点が明瞭にあらわれ、塑性化とともに変形が急増している。

表-1

	A-1	A-2	B-1	B-2	
弾性座屈荷重*	1093	1093	615	615	A-2の弾性限界荷重 = 1.257
弾性限界荷重	1864	2344	1448	1785	A-1の弾性限界荷重
弾性限界荷重	1.705	2.144	2.354	2.903	B-2の弾性限界荷重 = 1.233
弾性座屈荷重					B-1の弾性限界荷重

荷重単位 kg/cm^2 , *微小変形理論による値



6. あとがき; 今後、Dataの追加、境界条件の拡張、リブの合成効果、などについて検討を続けたいと考えている。