

(株)神戶製鋼所 正員 波田 凱 夫

1. 概説

曲げをうけるはりの横倒れ座屈の問題は、ふつう座屈に至るまではりの軸線は荷重の作用面内で変形しないとの仮定のもとに解かれている。しかしながら、図1に示したように荷重が新增していくと、はりはずす荷重の作用面内での変形を生じ、その後荷重がある限界値に達してはじめて横倒れ座屈をおこすというのが実際の過程である。本文は座屈にいたるまでのこのような変形が座屈荷重の値にどのような影響を及ぼすかを理論的に考察したものである。

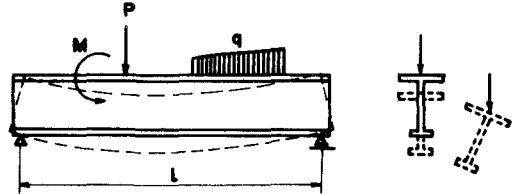


図1 はりの横倒れ座屈変形

この種の問題のもっとも簡単なもの(純曲げをうける長方形断面はり)はす

で Federhofer¹⁾, Chwalla^{2),3)} らによって解かれている。また最近では Unger⁴⁾ が還元法⁵⁾の応用によって若干の計算例を示しているが、一般的に曲げ変形の影響を論ずるには至っていない。

本文は2次弾性解析の理論⁵⁾によって、一般対称断面はりの一般の場合の基礎方程式を導出し、数値計算によって上記の特性を明らかにせんとするものである。

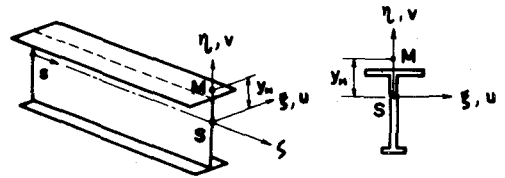


図2 断面と座標系

2. 基礎方程式の導出

図2に計算に用いられた座標系を示す。図

において、 S は図心、 M はせん断中心、 u, v はそれぞれ η 方向の変位とあらわす。また図3において、 $\overline{AB}, \overline{A'B'}$ はそれぞれ変形前後の単位長はり要素の軸線を、 M, Q は断面力をもつ m, q は一般の荷重とあらわす。ここで変形後のはり要素の釣合に用いてはいわゆる Kirchhoff-Clebsch の釣合条件式⁵⁾が成立する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} Q'_\xi - K_\xi Q_\eta + K_\eta Q_\xi &= -q_\xi, & Q'_\eta - K_\xi Q_\xi + K_\xi Q_\xi &= -q_\eta, & Q'_\xi - K_\eta Q_\xi + K_\xi Q_\eta &= -q_\xi & (\prime = d/ds) \\ M'_\xi - K_\xi M_\eta + K_\eta M_\xi &= Q_\eta - m_\xi, & M'_\eta - K_\xi M_\xi + K_\xi M_\xi &= -Q_\xi - m_\eta, & M'_\xi - K_\eta M_\xi + K_\xi M_\eta &= -m_\xi \end{aligned} \right\} \quad (1) a-f$$

ただし、 K_ξ, K_η はそれぞれ η 軸まわりの曲率、 K_ξ は ξ 軸まわりのねじり率である。(1)より Q_ξ, Q_η を消去し、さらに軸力の影響を無視して $Q_\xi = 0$ とおくと

$$-M'_\eta + (K_\xi M_\xi)' - (K_\xi M_\xi)' - K_\xi M'_\xi = -q_\xi + m'_\eta + K_\xi m_\xi, \quad M'_\xi - K_\eta M_\xi + K_\xi M_\eta = -m_\xi \quad (2) a, b$$

となる。ただし計算の過程で曲率、ねじり率の二次以上の項は微小として省略した。

つぎに K_ξ, K_η, K_ξ は2次弾性解析理論によりつぎのように与えられる⁵⁾。

$$K_\xi = -v'' - \beta u'', \quad K_\eta = u'' + \beta v'', \quad K_\xi = \beta' - u'v'' \quad (3) a-c$$

いずれも2項は非線型項である。さらに断面力についても非線型項を考慮し⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= EI_x [\beta \{ (y_H \beta)'' - u'' - v'' \}] = -EI_x u'' \\ M_\eta &= EI_y [\beta v'' + u'' - (y_H \beta)''] \\ M_\zeta &= \bar{G} J_d [\beta' - u' \{ u' - (y_H \beta)' \}] \\ &\quad - EC_w [\beta''' - \{ v'' (u' - (y_H \beta)') \}'' - y_H Q_\xi] \\ Q_\xi &= -M_\eta' + K_\xi M_\zeta - K_\zeta M_\xi - m_\eta \end{aligned} \right\} (4)_{a-d}$$

を得る。ただし、 $\bar{G} J_d = G J_d + k_x M_\xi$ で、 $G J_d$ は St. Venant のねじれ剛性、 k_x は断面固有の定数で $k_x = [\int y(x^2 + y^2) dF] / I_x$ であらわされる。また EI_x, EI_y はそれぞれ ξ, η 軸まわりの曲げ剛性、 EC_w はせん断中心に関する曲げねじれ剛性である。

最も一般の場合の基礎方程式は上記 (2), (3), (4) より $M_\xi, M_\eta, M_\zeta, Q_\xi$ を消去するとによって得られるが、以下簡単のため、断面がはりの全長を通じて一定の場合について考察する。

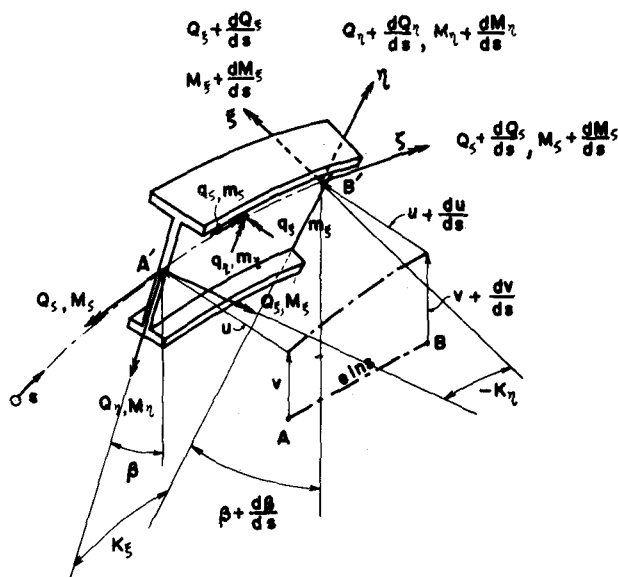


図3 はり要素の変形と断面力

$$\left. \begin{aligned} (3)_a \text{ において } K_\xi &= -v'', (4)_a \text{ より } v'' = -M_\xi / EI_x \text{ とし } v \text{ を消去し, (4) を (2) に代入すると} \\ \{ y_H EI_y (1 - y_H p) - EC_w (1 - y_H p) \} \beta''' - \{ y_H^2 EI_y p' - EC_w p' (2 y_H p - 1) \} \beta'' + \{ y_H EC_w (3 p'^2 + 2 p'^2) + (a + b - 1) (1 - y_H p) M_\xi \} \beta' \\ + \{ y_H EC_w (p' p)' + \{ (2 - 3a - 2b) y_H p - (2 - 2a - b) \} M_\xi' \} \beta - EI_y \{ y_H (p' p)' - p'' \} \beta \\ - \{ EI_y (1 - y_H p) + EC_w p'^2 \} u''' + \{ y_H EI_y - 4 EC_w p' \} p' u'' - \{ EC_w (3 p'^2 + 2 p'^2) - (b - 1 + y_H p) p M_\xi \} u'' \\ - \{ EC_w (p' p)' - (2b - 3 + 3 y_H p) p M_\xi' \} u' = -q_\xi + K_\xi m_\xi + m_\eta' - y_H (m_\eta M_\xi)' / EI_x \\ - \{ y_H^2 EI_y + EC_w (1 - y_H p) \} \beta''' + 3 y_H EC_w p' \beta'' + \{ \bar{G} J_d + 3 y_H EC_w p' + y_H (1 - 2a - b) M_\xi \} \beta' + \{ y_H EC_w p'^2 + y_H (1 - 2a - b) M_\xi' \} \beta' \\ - \{ y_H EI_y p'' - p M_\xi (1 - a) \} \beta + \{ y_H EI_y - EC_w p' \} u''' - 3 EC_w p' u'' + \{ p (\bar{G} J_d + EI_y + y_H M_\xi) - M_\xi - 3 EC_w p'' \} u'' \\ + \{ p' (\bar{G} J_d + 2 y_H M_\xi) - EC_w p''' \} u' = -m_\xi \end{aligned} \right\} (5)_{a,b}$$

ただし、 $p = M_\xi / EI_x$, $a = EI_y / EI_x$, $b = (G J_d + k_x M_\xi) / EI_x$, $(\cdot)' = d/ds$ である。これが断面一定のはりに関する一般の基礎方程式である。

さらに簡単の場合として、純曲げを受けるはりの横倒れ座屈の問題を考えると、 $M_\xi = M = \text{Const}$ であり、さらに (5)_{a,b} の右辺荷重項はすべて 0 と取るから、基礎式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{ v_H - (n + v_H^2) \kappa \lambda + n v_H \kappa^2 \lambda^2 \} \beta''' + \{ (\kappa + m \kappa - 1) \lambda + (r_x + v_H - v_H \kappa - m v_H \kappa) \kappa \lambda^2 - v_H r_x \kappa^2 \lambda^3 \} \beta'' \\ - \{ (1 - v_H \kappa \lambda + n \kappa^2 \lambda^2) \theta''' + \{ (m \kappa - 1) \kappa \lambda^2 + (r_x + v_H) \kappa^2 \lambda^3 \} \theta'' = 0 \\ - \{ v_H^2 + n - v_H n \kappa \lambda \} \beta''' + \{ m + (r_x + v_H - 2 v_H \kappa - m v_H \kappa) \lambda - r_x v_H \kappa \lambda^2 \} \beta'' + \{ (1 - \kappa) \kappa \lambda^2 \beta \\ + \{ v_H - n \kappa \lambda \} \theta''' + \{ (\kappa + m \kappa - 1) \lambda + (v_H + r_x) \kappa \lambda^2 \} \theta'' = 0 \end{aligned} \right\} (6)_{a,b}$$

ただし、式 (6) はすべて無次元表示されており、 $m = G J_d / EI_y$, $n = EC_w / l^2 EI_y$, $\kappa = EI_y / EI_x$, $\lambda = M l / EI_y$, $v_H = y_H / l$, $r_x = k_x / l$, $\theta = u / l$ である。さらに微分記号 $(\cdot)'$ は $d/d\sigma$ をあらわす。ここに $\sigma = s / l$ である。

3. 基礎方程式の解

式(6)を境界条件

$$s=0.1; \theta=\theta'=\beta=\beta'=0 \quad (7)$$

のもとにとく。この条件は、はりの両端で側方変形に対して単純支持、および断面のそり自由なることを意味する。もっとも簡単なのは $n=v_h=r_x=0$ の場合であつて、これは Chwalla²⁾ が扱つた問題であるが、(6)を(7)のもとにとくと座屈係数 λ_{kr} は

$$\lambda_{kr} = \pi \sqrt{m} / \sqrt{(1-\kappa)(1-m\kappa)} \quad (8)$$

これに対して Chwalla の解は

$$\lambda_{kr} = \pi \sqrt{m} / \sqrt{(1-\kappa)(1-2m\kappa)} \quad (8')$$

である。(8)と(8')の相異はつぎの點に起因する。すなわち文献2では Kirchhoff-Clebsch の釣合方程式を用いるにあつて、ねじり率 K_y に荷重面内曲率の影響を考慮してゐない。このため、やや過大に(8')の値が得られてゐるのである。

さて(6)の一般解を

$$\theta = \Theta \sin i\pi z, \quad \beta = B \sin i\pi z \quad (i=1, 2, \dots)$$

とし、これらを(6)に代入すると

①, B に關する同次連立方程式が

得られる。すなわち $\bar{m} = m + i^2 \pi^2 n$ とし、

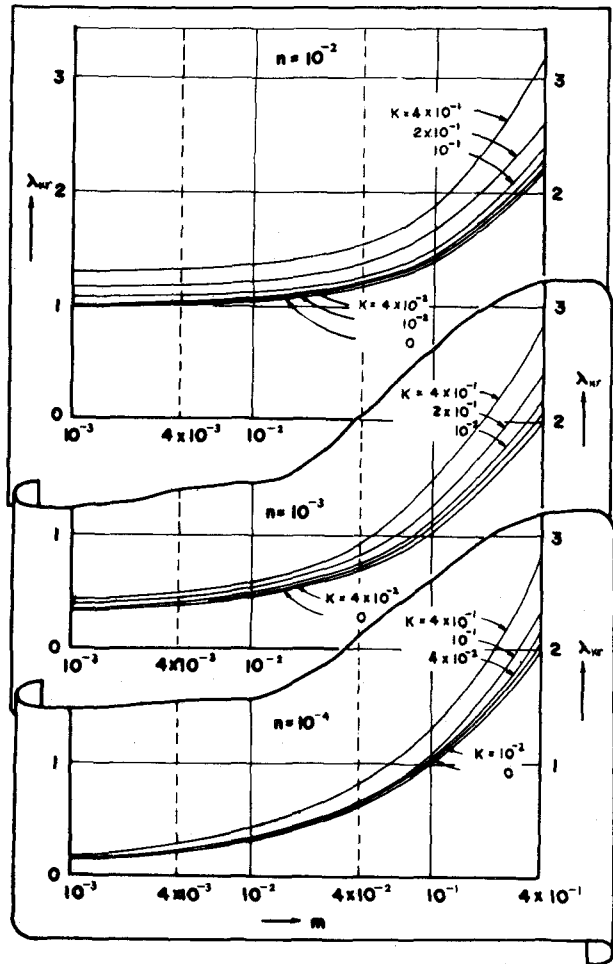


図4 座屈係数(その一)

B	①	
$v_h(1-v_h K \lambda) i^2 \pi^2 \{(\kappa + \bar{m} \kappa - 1) \lambda + (r_x + v_h - v_h \kappa - \bar{m} v_h \kappa) \kappa \lambda^2 - v_h r_x \kappa^2 \lambda\}$	$-(1-v_h K \lambda) i^2 \pi^2 \{(\bar{m} \kappa - 1) \kappa \lambda^2 + (v_h + r_x) \kappa^2 \lambda\}$	0 (9) _{a, b}
$-v_h i^2 \pi^2 \{ \bar{m} + (r_x + v_h - 2 v_h \kappa - \bar{m} v_h \kappa) \lambda + r_x v_h \kappa \lambda^2 \} i^2 \pi^2 + (1-\kappa) \kappa \lambda^2$	$v_h i^2 \pi^2 \{ (\kappa + \bar{m} \kappa - 1) \lambda + (v_h + r_x) \kappa \lambda^2 \} i^2 \pi^2$	0

$B \neq 0$, ① $\neq 0$ なるためには(9)の係数行列式が0となればならぬことから、座屈係数 λ_{kr} は次式の最小正根として与えられる。

$$-\bar{m} \pi^2 - (r_x - v_h) \pi^4 \lambda + (1 - \kappa - \bar{m} \kappa + 2 \bar{m} \kappa^2 - v_h \kappa \pi^2) \pi^2 \lambda - (v_h + r_x - 2 \kappa r_x) \kappa \pi^2 \lambda^3 + \{ (1 - \kappa)(\bar{m} \kappa - 1) + v_h \pi^2 \kappa \} \pi^4 \lambda^5 + (v_h + r_x)(1 - \kappa) \kappa^2 \lambda^5 = 0 \quad (10)$$

もちろん(10)で $v_h = r_x = 0$, $\bar{m} = m$ ($n=0$)とした場合は(8)が得られ、また $\kappa=0$ とした場合は、はりの軸線の荷重作用面内での変形を考慮しない通常の結果が得られる。

4. 数値計算例

図4と図5に若干の数値計算結果を示す。図4では荷重面内曲率の影響をあらわす K を

パラメータとして、座屈係数 λ_{kr} の変化の様子をあらわしている。また、図5により K の増加につれて λ_{kr} がどのように変化するのが読みとれる。これらの図はいずれも $r_x = v_H = 0$ の場合の結果を示しているが、これらが0でない場合でも(10)を解いて λ_{kr} を得ることは容易である。

これらの図から一般に、(i)荷重面内曲率の影響をあらわす K が大になれば、座屈荷重は通常の値($K=0$)より大となる(一種のアーチ作用)、(ii) K の影響は、 m または n の値が大になるほど(すなわち換算ねじれ剛性 $\bar{m} = m + \pi^2 n$ が大になる)顕著にあらわれてくること、等が明らかである。さらに詳細な計算資料は講演会当日に補足する。

なお、境界条件として(7)以外の場合についても現在検討中である。結果は機会をあらためて報告する予定である。

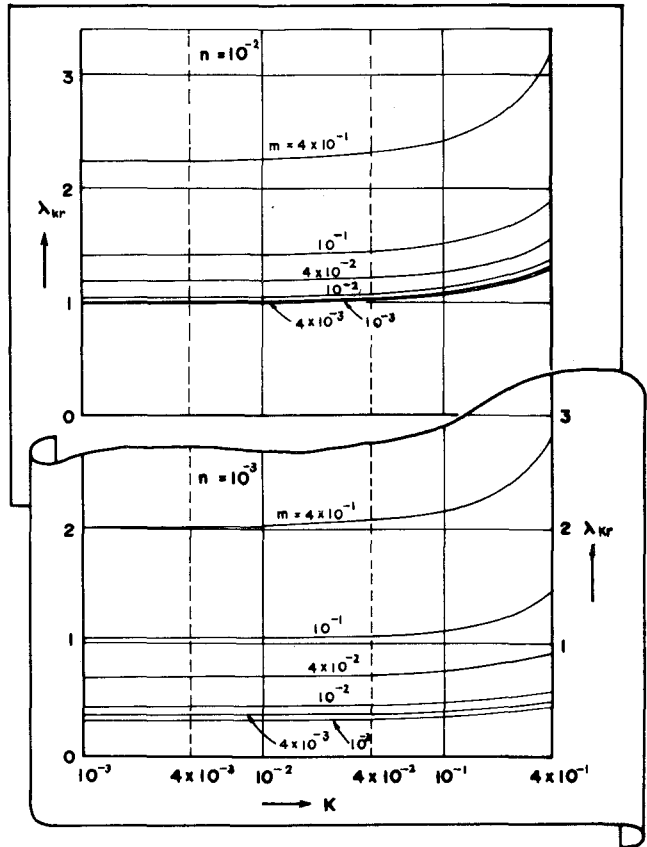


図5 座屈係数 ($\gamma = 0$)

参考文献

- 1) Federhofer, Neue Beiträge zur Berechnung der Kippplasten gerader Stäbe. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaft, Wien 1931.
- 2) Chwalla, Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppelt-symmetrischem I-Querschnitt. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues, H. 2, Berlin 1939.
- 3) Chwalla, Einige Ergebnisse der Theorie des außermittig gedrücktem Stabes mit dünnwandigem offenem Querschnitt, Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues, H. 6, Berlin 1943.
- 4) Unger, Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfach-symmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt unter Verwendung einer Abwandlung des Reduktionsverfahren als Lösungsmethode, der Stahlbau, H. 6, 1970.
- 5) Namita, Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Transactions of JSCE, No. 155, July 1968.