I-8

破壊モードの相関を考慮した、構造物の破壊確率

京都大学工学部　正員　小西一郎
京都大学工学部　正員　○白井勝之

1. まえがき

構造物の破壊確率を算定する場合、その破壊モードの相関は最も重要な因子となる。なぜなら構造物の破壊確率 P_f は、次の式で表わされる領域にある。

$$\max_{i=1}^{m} P_{fi} \leq P_f \leq \sum_{i=1}^{m} P_{fi} \qquad (1)$$

上限は、各破壊モードが統計的に独立と仮定した場合であり、下限は各破壊モードの完全な統計的従属性を仮定した場合である。しかしながら、この式は実際上の利用価値が小さく、特に破壊モードの数が多い時著しい。ここでは、破壊モードの相関がどの程度であるかを ordering method を用いて検討する。

2. 解析方法

ordering method は、各破壊モードを独立させ、他のモードの残存の条件のもとで破壊確率を求めようとする方法である。

任意の構造物に荷重が作用する場合、m 個の破壊モードが存在するとし、前もって適当に番号づけを行なう。i 番目の破壊モードの残存事象を S_i，破壊事象を F_i と表示すれば、構造物全体の破壊確率 P_f は、

$$P_f = P_r\{(F_1) \cup (F_2S_1) \cup (F_3S_1S_2) \cup \cdots\cdots \cup (F_mS_1S_2\cdots S_{m-1})\} \qquad (2)$$

各事象は互に排他的であるから、

$$P_f = P_r(F_1) + P_r(F_2S_1) + P_r(F_3S_1S_2) + \cdots\cdots + P_r(F_mS_1S_2\cdots S_{m-1})$$

$$= P_r\left(\frac{R_1}{C_1} < P\right) + P_r\left(\frac{R_2}{C_2} < P < \frac{R_1}{C_1}\right) + P_r\left(\frac{R_3}{C_3} < P < \frac{R_1}{C_1}, \frac{R_2}{C_2}\right) + \cdots\cdots + P_r\left(\frac{R_m}{C_m} < P < \frac{R_1}{C_1}, \frac{R_2}{C_2}, \cdots, \frac{R_m}{C_{m-1}}\right) \qquad (3)$$

ここで、C_i は単位荷重により破壊モード i に導入される荷重であり、P は荷重、R_i は、第 i 番目破壊モードの抵抗である。

$$M_i = P_r\left(R_i/C_i < P < R_1/C_1, R_2/C_2, \cdots\cdots, R_{i-1}/C_{i-1}\right) \qquad (4)$$

とおくと、

$$P_f = \sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{i=1}^{m} a_i P_{fi} \qquad (5)$$

ここで　$a_i = M_i/P_{fi}$　$(a_1 = 1)$　であり、破壊モード間の相関係数に類似したものである。以下では、M_i を計算しこれから a_i を求めようとするものである。(4) を計算するに当って

$$\Phi_1(a) = P_r\left[a < R_1/C_1, R_2/C_2, \cdots\cdots, R_{i-1}/C_{i-1}\right] \qquad (6)$$

とおく。R_1/C_1, R_2/C_2, …… R_{i-1}/C_{i-1} は独立なランダム変数であると仮定すれば、

$$\Phi_1(a) = \prod_{k=1}^{k=i-1}\left[1 - F_{R_k/C_k}(a)\right] \qquad (7)$$

一方　$P_r\left[R_i/C_i < a\right] = F_{R_i/C_i}(a) = \Phi_2(a)$ $\qquad (8)$

とおく。a は荷重 P に相当し、P もランダム変数であるから A のすべての取りうる値をとって、

$$M_i = \int_0^\infty \prod_{k=1}^{k=i-1}\left[1 - F_{\frac{R_k}{C_k}}(t)\right] F_{\frac{R_i}{C_i}}(t)\, f_P(t)\, dt \qquad (9)$$

(9)式を数値計算すれば，相関の程度を示す係数a_iが求まる。

3．数値計算例と，結果に対する考察

構造物には30の破壊モードがあると考え，各破壊モードに対して許容応力法が正確に適用されたと仮定した。従って各破壊モードの破壊確率P_{fi}はすべて等しく，P_{f1}となる。

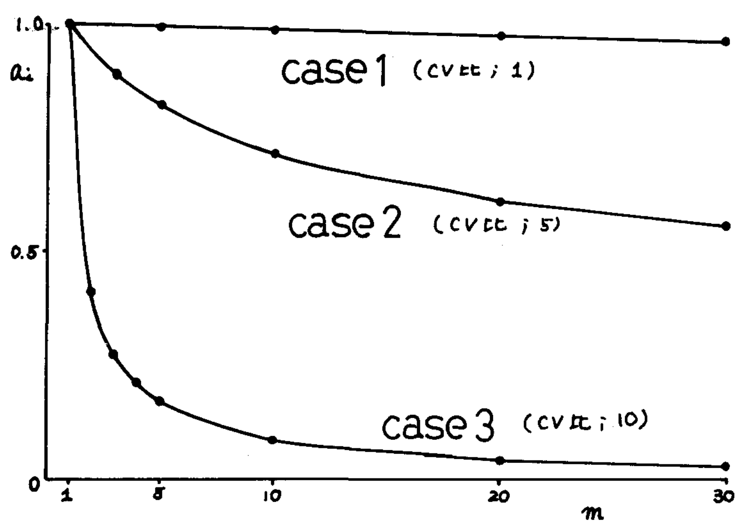
		mean μ	variance σ	coefficient of variation r
Case 1	Load	1400(kg/cm^2)	140(kg/cm^2)	10(%)
	Resistance	2500	250	10
Case 2	Load	1400	140	10
	Resistance	2500	50	2
Case 3	Load	1400	280	20
	Resistance	2500	50	2

荷重と抵抗の分布は共に正規分布とし，その平均，分散に対し，右表の様に3種の組合せの場合について考えた。鋼道路橋設計示方書によれば，SS41の保証降伏点強度は2300 kg/cm²，許容応力度は1400 kg/cm²である。従って降伏点強度の平均を2500 kg/cm²と少々大きめに取った。又荷重の平均値は，許容応力度とした。

数値計算結果は，右の表および図である。その結果から，次の結論に達する。

	Pf_1	$\sum_{i=1}^{30} a_j$	$Pf = \sum_{i=1}^{30} a_j Pfi$
Case 1	0.6176×10^{-4}	29.34	1.812×10^{-3}
Case 2	0.6840×10^{-13}	20.80	1.423×10^{-12}
Case 3	0.5270×10^{-4}	3.07	1.618×10^{-4}

構造物の破壊モードの相関は，抵抗および荷重の変動係数に非常に左右される。荷重の変動係数と抵抗のそれとの比，すなわちCV比が大きければ大きい程，破壊モード間に，統計的な従属性の性質が強くなってくる。



CV比が大きくなっていく事は，荷重の変動係数が抵抗の変動係数よりもずっと大きく、究極的には抵抗の変動を無視することを意味する。即ち，抵抗はランダム量としてではなく，あるdeterministicな値として取り扱かう事になる。この事は，各部材に導入される荷重は，値そのものはランダム量であっても，それらの間に関数的関係が存在するという事実と照らし合わせると，構造物のある破壊モードが残存すれば，ほとんど他の部材は安全であると考えるのと一致している。すなわち破壊モード間に完全な統計的従属性があると考えられる。この数値計算結果は，以上の推論にうまく合致したものである。

（参考文献）
○ F. Moses, D.E. Kinser "Analysis of Structural Reliability", Proc. ASCE, ST3, 1961
○ F. Moses, D.E. Kinser "Optimum Structural Design with Failure Probability Constraint", AIAA Journal June 1967.