I-4 立体ラーメンの動的解析について

神戸大学 工学部 正員 ○宮根憲二
〃 〃 〃 桜井春輔

1. まえがき

骨組の動的解析を遂行する際、用いられる理想化したモデルに2つの基本的な型がある。1つは(I) discrete mass system (lumped mass) であり、1つは(II) continuous mass (distributed mass) である。本研究において(I)については、1つのモデルに対して4つの場合の固有値と固有ベクトルを求め、さらに固有値に対しては(II)により実証した。なお(II)においてはエネルギー理論より導かれる分布質量の質量 matrix を用いるのではなく、Laursen が提案するように、ラーメン構成部材の棒の曲げ振動の微分方程式に境界条件を入れて得られる部材端での曲げモーメント、せん断力、たわみ角、部材回転角の関係を matrix 表示し、同様に縦振動からは軸力と変位の関係、ねじれ振動からはねじりモーメントと断面の回転角の関係を matix 表示して、振動数方程式より固有値を算出するものである。

2. 解析の方法

(I) Discrete Mass System

構造物がつりあいを保つために(i)つりあい条件 $\{d\}=[A]\{D\}$ (ii)フックの法則 $\{g\}=[k]\{d\}$ (iii)適合条件 $\{Q\}=[A]^T\{g\}$ である。(i)(ii)(iii)より $\{Q\}=[K]\{D\}$ となり、$[K]=[A]^T[k][A]$ が得られる。但し $\{g\}$－各節点での部材応力列ベクトル、$\{Q\}$－各節点での外力列ベクトル、$\{d\}$－各節点での部材ひずみ列ベクトル、$\{D\}$－各節点での変位列ベクトル、$[k]$－部材剛性 matrix、$[A]$－変位変換 matrix、$[K]$－構造物全体の剛性 matrix。x 軸上にある1部材の部材剛性 matrix $[k]$ を 6×6 で表わすと、$\{M^{iy};M^{jy};M^{iz};M^{jz};PL;T\}=(2EI/L)[k]\{\theta^{iy};\theta^{jy};\theta^{iz};\theta^{jz};e/L;\psi\}$、$[k]$ の要素で 0 でないのは $(1,1)=(2,2)=(3,3)=(4,4)=2$, $(1,2)=(2,1)=(3,4)=(4,3)=1$, $(5,5)=AL^2/2I$, $(6,6)=JG/2EI$ である。運動方程式より $(K-\omega^2M)\{D\}=\{0\}$ となり、Jacobi 法によって固有値と固有ベクトル(モード)を求めた。質量 matrix は対角行列とした。

(II) Continuous Mass System

動的な力と変形の関係は $\{g\}=[k(\omega)]\{d\}$ と表わされ、ラーメンの動的剛性 matrix は静的な場合と同様に $[K(\omega)]=[A]^T[k(\omega)][A]$ とする。但し、$[K(\omega)]$－ラーメン動的剛性 matrix、$[k(\omega)]$－部材動的剛性 matrix、$[A]$－変位変換 matrix ((I)での変位変換 matrix とは独立したものである)。x 軸上にある1部材の部材動的剛性 matrix を図－1に示す。振動数方程式は $[K(\omega)]\{D\}=0$ であり、$\{D\}$ が 0 以外の解をもつためには $|K(\omega)|=0$ が満足される時である。この解は trial and error によって求まる。

3. 数値計算例

モデルは一層立体ラーメンで寸法が、水平部材、垂直部材とも 6.1 m、外径 30.5 cm、断面積 238.07 cm^2 の鋼管に水が満たされているものである。(I)の要素のとり方は、(a)節点にだけ質点がある、(a′) (a)の場合で柱からは柱の 1/3 の質量をとる、(b)柱、梁を2等分、(c)柱、梁

を3等分、(d)柱、梁を4等分とした。計算結果は表-1に示し、図-2は(d)の場合についてのモードである。

$$
\begin{Bmatrix} M^{iy} \\ V^{iz}L \\ M^{jy} \\ V^{jz}L \\ M^{iz} \\ V^{iy}L \\ M^{jz} \\ V^{jy}L \\ P^{i}L \\ P^{j}L \\ T^{i} \\ T^{j} \end{Bmatrix}
= \frac{EI}{L}
\begin{bmatrix}
K1 & -K2 & K3 & K4 & & & & & & & & \\
-K2 & K5 & -K4 & -K6 & & & & & & & & \\
K3 & -K4 & K1 & K2 & & & & & & & & \\
K4 & -K6 & K2 & K5 & & & & & & & & \\
& & & & K1 & K2 & K3 & -K4 & & & & \\
& & & & K2 & K5 & K4 & -K6 & & & & \\
& & & & K3 & K4 & K1 & -K2 & & & & \\
& & & & -K4 & -K6 & -K2 & K5 & & & & \\
& & & & & & & & K7 & -K8 & & \\
& & & & & & & & -K8 & K7 & & \\
& & & & & & & & & & K9 & -K10 \\
& & & & & & & & & & -K10 & K9
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta^{iy} \\ \eta^{iz}/L \\ \theta^{jy} \\ \eta^{jz}/L \\ \theta^{iz} \\ \eta^{iy}/L \\ \theta^{jz} \\ \eta^{jy}/L \\ e^{i}/L \\ e^{j}/L \\ \psi^{i} \\ \psi^{j} \end{Bmatrix}
$$

$$K1 = \frac{sC - cS}{1 - cC}(\lambda A) \qquad K5 = \frac{sC + cS}{1 - cC}(\lambda A)^3 \qquad K7 = \beta\frac{\cos bL}{\sin bL}(\lambda B) \qquad K9 = \gamma\frac{\cos cL}{\sin cL}(\lambda C)$$

$$K2 = \frac{sS}{1 - cC}(\lambda A)^2 \qquad K6 = \frac{S + s}{1 - cC}(\lambda A)^3 \qquad K8 = \beta\frac{(\lambda B)}{\sin bL} \qquad K10 = \gamma\frac{(\lambda C)}{\sin cL}$$

$$K3 = \frac{S - s}{1 - cC}(\lambda A) \qquad s = \sin(\lambda A),\ c = \cos(\lambda A) \qquad b = \sqrt{\frac{\omega^2 m}{AE}} \qquad c = \sqrt{\frac{\omega^2 I_m}{JG}}$$

$$K4 = \frac{C - c}{1 - cC}(\lambda A)^2 \qquad S = \sinh(\lambda A),\ C = \cosh(\lambda A) \qquad \beta = \frac{AE\,L^2}{EI} \qquad \gamma = \frac{JG}{EI}$$

$$(\lambda A) = aL \qquad a = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}} \qquad (\lambda B) = bL \qquad (\lambda C) = cL$$

図-1 部材動的剛性 matrix

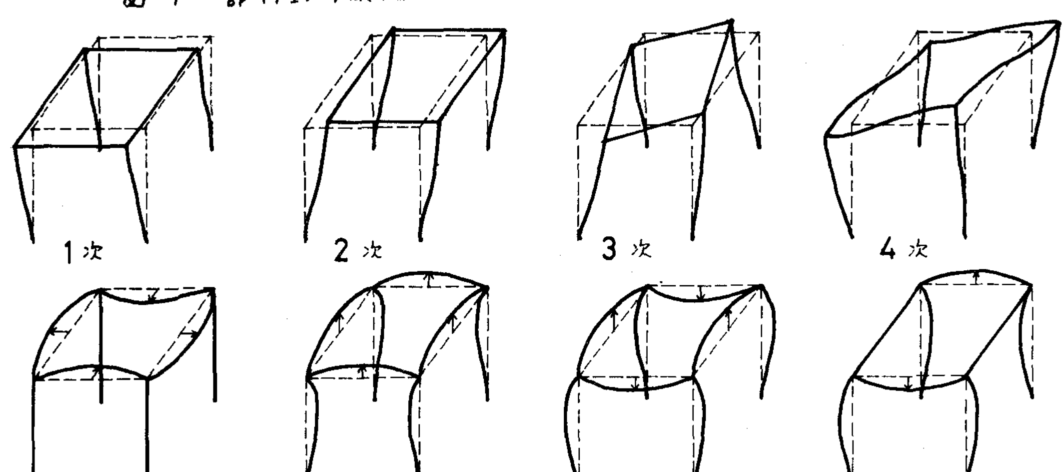

図-2 一層立体ラーメンの自由振動モード

4. あとがき

立体ラーメンの自由振動の固有周期と質点数についてみたわけであるが(a)′のことが剛比の異なる部材からなる場合にもそうであるのか、また(I)(II)において回転慣性を無視したがその影響はいかほどであるか、現在研究中である。

Model	mode 1		mode 2		mode 3		mode 4	
	周期sec	%	周期sec	%	周期sec	%	周期sec	%
(a) 質点数 4	0.20836	6.46	0.20836	6.46	0.18712	22.69	0.10523	17.95
(a′) 〃	0.19642	0.37	0.19642	0.37	0.17639	15.66	0.09920	11.20
(b) 〃 12	0.19761	0.97	0.19761	0.97	0.16008	4.96	0.09032	1.24
(c) 〃 20	0.19649	0.40	0.19645	0.38	0.15583	2.17	0.08961	0.45
(d) 〃 28	0.19617	0.24	0.19615	0.22	0.15441	1.24	0.08948	0.30
Continuous	0.19570	—	0.19570	—	0.15251	—	0.08921	—

表-1 固有周期と質点数(%はconti.に対する誤差)

参考文献; Laursen,「Matrix Analysis of Structures」New York, McGraw-Hill, 1966