

粒状集合体内の応力状態について

京都大学工学部 正員 丹羽義次
 建設省 正員 小川見豊武

粒状集合体内の応力伝播については従来の Boussinesq の解などの連続体としての解析があり、実用的にはこれらの解は有効である。しかし本来ばらばらの粒子からなる集合体に対しては力学的アプローチとして限界があると言わねばならない。一方不連続体として、Housel や Trollope が応力伝達機構について考察している。これらの理論は粒子間のまをを無視するものであり、不十分な点がある。本研究では粒子間まをを考慮に入れ、Hertz と Mindlin の弾性接触球理論を単純化して粒子間の接触反力と変位との関係を求め、これをもとに各粒子のつりあい式より粒子の変位と接触反力を求めてこれを次々と他の粒子に及ぼすことにより応力伝達を求めた。

粒状体をミクロ的に解析する場合、変数として各粒子の位置、回転および粒子間に働く力が考えられ、これに対する方程式としては力のつりあい式、モーメントのつりあい式、接触点での変位式がある。この変位式として Hertz と Mindlin の解が考えられる。

同質の等球の場合の Hertz の解は

$$\alpha = 2(KP/R^2)^{2/3} \quad (1)$$

ここで α ; 粒子中心間の相対変位の垂直成分 P ; 接触面に働く垂直力

R ; 球の半径 $K = 3(1-\nu^2)/4E$ E, ν ; 弾性係数とポアソン比

垂直力が一定のまま接触力が漸増する場合の Mindlin の解の接触力とその方向の相対変位との関係図で、原点でのその曲線の接触によって接触力とその方向の相対変位の関係を近似すると

$$\delta = (2-\nu)/8\mu a \cdot Q \quad (2)$$

ここで δ ; 接触方向の相対変位 Q ; 接触力 $a = (KPR)^{1/3}$ μ ; せん断弾性係数

図1で、外力 P_i, Q_i による粒子の変位の方向と大きさを θ と D とすると、各接点変位は

$$\alpha_i = D \cos \theta_i, \quad \delta_i = D \sin \theta_i \quad (3)$$

で表わされる。これを(1)、(2)式に代入し、 P, Q について逆に解くと、各接点反力は

$$P_i = A[D \cos(\theta - \theta_i)]^{3/2}, \quad Q_i = B \cdot D^{3/2} \sin(\theta - \theta_i) \cos^{1/2}(\theta - \theta_i) \quad (4)$$

で表わされる。 A, B は球の半径 R , 弾性定数 E, ν, μ により決まる定数である。

ここで力のつりあい式

$$\left. \begin{aligned} \sum (P_i \cos \theta_i + Q_i \sin \theta_i) + \sum (P_i \cos \theta_i + Q_i \sin \theta_i) &= 0 \\ \sum (P_i \sin \theta_i - Q_i \cos \theta_i) + \sum (P_i \sin \theta_i - Q_i \cos \theta_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

に(4)式を代入して、 D, θ について解が求められる。しかしこのままではモーメントのつりあいは成立しない。これは(1)、(2)式が回転の項を含まないからである。ここで仮定として、モーメントのつりあいが破れた場合、これを修正する方向に接触力をとり、 $|\theta - \theta_i|$ の

最小の接点以外ではすばりの状態にあるとして、再び(5)式より D , θ を求めた。この結果の一部を図2以下に示す。詳細は当日に譲る。

図-1. 応力伝達機構

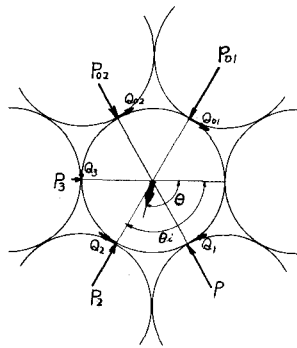


図-2 変位の方法

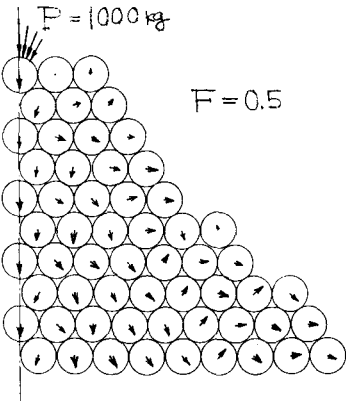
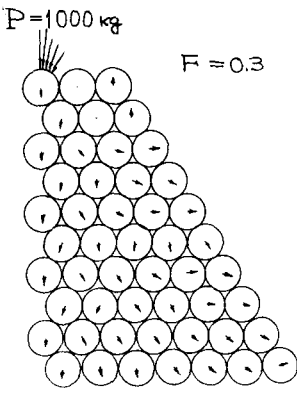


図-3 正六角形配列モデル-1

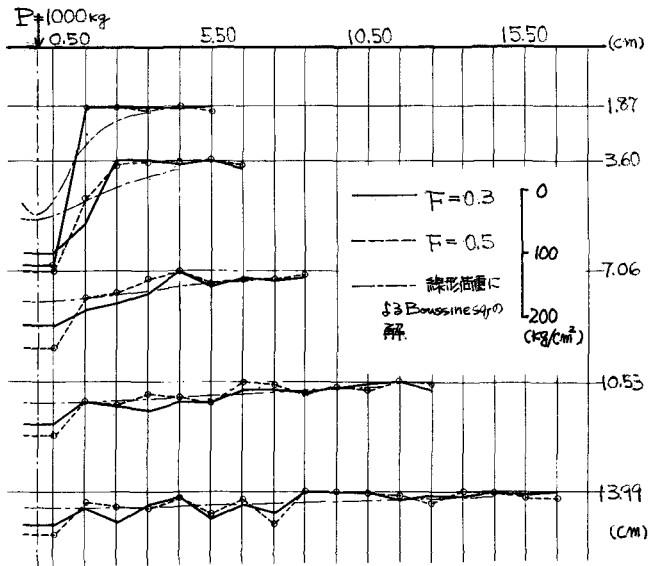


図-4 正方形配列モデル-3

