圧縮供試体の応力分布に及ぼすカップルストレスの影響について

京都大学　正員　丹羽　義次
京都大学　正員　小林　昭一
京都大学大学院　○森竹　淳

1.はじめに

コンクリートのような不均質特性，あるいは粗粒岩石のような粒状特性の卓越した材料では，応力分布が内部組織に依存し，従来の弾性論から求められる解とは異なったものとなることが考えられる。このような特性を考慮する一つの方法として，カップルストレス理論がある。本報では，材料試験において最も重要である圧縮供試体の応力分布をカップルストレス理論を用いて解析し，弾性理論による結果との比較を行なった。

2.基礎方程式

MINDLINの理論にしたがえば

構成方程式　$\tau^{(\alpha\beta)} = G[(U^{\alpha}|^{\beta} + U^{\beta}|^{\alpha}) + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{\alpha\beta} U^{r}|_{r}]$, $m^{\alpha} = 4Gl^2\omega|^{\alpha} = 4Gl^2\kappa^{\alpha}$

釣合方程式　$\tau^{\alpha\beta}|_{\alpha} = 0$, $m^{\alpha}|_{\alpha} + \varepsilon^{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta} = 0$

適合条件式　$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\delta r} d_{\beta r}|_{\alpha\delta} = 0$, $\varepsilon^{\alpha\beta}\kappa_{\alpha}|_{\beta} = 0$

G; せん断弾性定数
l; 材料定数
τ; cauchy 応力
m: Couple Stress.

3 応力関数

応力が次のように表わせるとする

$$\tau^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha r}\varepsilon^{\beta s}\phi|_{rs} + \varepsilon^{r\alpha}\psi|_{r}^{\beta} , \quad m_{\alpha} = \psi|_{\alpha}$$

そのとき応力関数は次式を満足せねばならない

$$\nabla^4\phi = 0 , \quad (l^2\nabla^2 - 1)\nabla^2\psi = 0 , \quad (l^2\psi - \psi)|_{\alpha} = 2(1-\nu)l^2\varepsilon_{\alpha\beta}\nabla^2\phi|^{\beta}$$

この解は図の場合には

$$\Phi = \sum (A_n \cosh\alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh\alpha_n y)\cos\alpha_n x + \sum (A'_m \cosh\beta_m x + B'_m \beta_m x \sinh\beta_m x)\cos\beta_m y$$

$$\psi = \sum (C_n \sinh\alpha_n y + D_n \sinh\gamma_n y)\sinh\alpha_n x + \sum (C'_m \sinh\beta_m x + D'_m \sinh\gamma_m x)\sinh\beta_m y$$

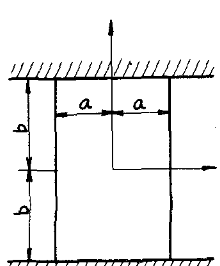
ここで

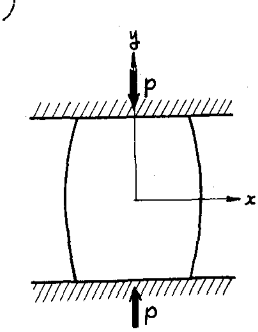
$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{n\pi}{2a} , & \gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \dfrac{1}{l^2}} \\ \beta_m = \dfrac{m\pi}{2b} ; & \gamma_m = \sqrt{\beta_m^2 + \dfrac{1}{l^2}} \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} n = 1, 3, 5 \cdots \\ m = 1, 3, 5 \cdots \end{matrix} \right)$$

4.境界条件

$x = \pm a$ において　$\sigma_x = \tau_{xy} = \mu_x = 0$

$y = \pm b$ において　$u = 0$
$v = -v_0$
$\mu_y = 0$





Compatibility から

$$C_n = -4(1-\nu)\,l^2\alpha_n^2 B_n \tag{a}$$

$$C_m' = 4(1-\nu)\,l^2\beta_m^2 B_m' \tag{b}$$

$\sigma_x=0$ at $x=\pm a$

$$\beta_m^2(A_m'\cosh\beta_m a + B_m'\beta_m a\sinh\beta_m a) + \beta_m^2 C_m'\cosh\beta_m a + \beta_m\gamma_m D_m'\cosh\gamma_m a = 0 \tag{c}$$

$\mu_x=0$ at $x=\pm a$

$$\beta_m C_m'\cosh\beta_m a + \gamma_m D_m'\cosh\gamma_m a = 0 \tag{d}$$

$u=0$ at $y=\pm b$

$$\alpha_n[\{(1+\nu)A_n + 2(1-\nu^2)B_n\}\cosh\alpha_n b + (1+\nu)\alpha_n B_n b\sinh\alpha_n b] - (1+\nu)\alpha_n C_n\cosh\alpha_n b \tag{e}$$
$$-(1+\nu)\gamma_n D_n\cosh\gamma_n b = 0$$

$\mu_y=0$ at $y=\pm b$

$$\alpha_n C_n\cosh\alpha_n b + \gamma_n D_n\cosh\gamma_n b = 0 \tag{f}$$

$\tau_{xy}=0$ at $x=\pm a$

$$\sum_n \alpha_n^2\{(A_n+B_n)\sinh\alpha_n y + B_n\alpha_n y\cosh\alpha_n y\}\sinh\alpha_n a + \sum_m \beta_m^2\{(A_m'+B_m')\sinh\beta_m a$$
$$+ B_m'\beta_m a\cosh\beta_m a\}\sin\beta_m y - \sum_n \alpha_n^2 C_n\sinh\alpha_n y\sin\alpha_n a + \sum_m \beta_m^2 C_m'\sinh\beta_m a\sin\beta_m y$$
$$-\sum_n \gamma_n^2 D_n\sinh\gamma_n y\sin\alpha_n a + \sum_m \beta_m^2 D_m'\sinh\gamma_m a\sin\beta_m y \tag{g}$$

$v=-v_0$ at $y=\pm b$

$$-\frac{Ev_0}{1+\nu} = \sum_n \alpha_n[\{-A_n+(1-2\nu)B_n\}\sinh\alpha_n b - B_n\alpha_n b\cosh\alpha_n b]\cos\alpha_n x$$
$$+\sum_m \beta_m[\{A_m'+2(1-\nu)B_m'\}\cosh\beta_m x + B_m'\beta_m x\sinh\beta_m x]\sin\beta_m x$$
$$+\sum_n \alpha_n C_n\sinh\alpha_n b\cos\alpha_n x + \sum_m \beta_m C_m'\cosh\beta_m x\sin\beta_m b$$
$$+\sum_n \alpha_n D_n\sinh\gamma_n b\cos\alpha_n x + \sum_m \gamma_m D_m'\cosh\gamma_m x\sin\beta_m b \tag{h}$$

(a)～(f) で $A_n, A_m', C_n', C_m', D_n, D_m'$ は B_n あるいは B_m' で表わされるが，(g), (h) に $\sinh\beta_m y$, $\cos\alpha_n y$ etc. が含まれているので，これらを周期 $4a$, $4b$ で展開して整理すると．

$$\sum_n (-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\cdot\frac{2\alpha_n}{b}\left[\cosh\alpha_n b\cdot A_n + \left\{\alpha_n b\sinh\alpha_n b + \left(1-\frac{\alpha_n^2-\beta_m^2}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\right)\cosh\alpha_n b\right\}B_n\right]$$
$$+\beta_m^2[\sinh\beta_m a\cdot A_m' + (\sinh\beta_m a + \beta_m a\cosh\beta_m a)\cdot B_m']$$
$$-\sum_n (-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\cdot\frac{2\alpha_n}{b}\cosh\alpha_n b\cdot C_n + \beta_m^2\sinh\beta_m a\cdot C_m'$$
$$-\sum_n (-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2+\beta_m^2}\cdot\frac{2\gamma_n}{b}\cosh\gamma_n b\cdot D_n + \beta_m^2\sinh\gamma_m a\cdot D_m' = 0 \tag{g-1}$$

$$-\alpha_n\sinh\alpha_n b\cdot A_n + \{\alpha_n(1-2\nu)\sinh\alpha_n b - \alpha_n b\cosh\alpha_n b\}B_n + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2\beta_m}{a}\times$$
$$\frac{\alpha_n}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\cosh\beta_m a\cdot A_m' + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{2\beta_m}{a}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\alpha_n}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\{2(1-\nu)\cosh\beta_m a + a\beta_m\sinh\beta_m a\} + \frac{2\alpha_n\beta_m^2}{(\alpha_n^2+\beta_m^2)^2}\right]B_m'$$
$$+\alpha_n\sinh\alpha_n b\cdot C_n + \alpha_n\sinh\gamma_n b\cdot D_n + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2\beta_m}{a}\frac{\alpha_n}{\alpha_n^2+\beta_m^2}\cosh\beta_m a\cdot C_m'$$
$$+\sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2\gamma_m}{a}\frac{\alpha_n}{\alpha_n^2+\gamma_m^2}\cosh\gamma_m a\cdot D_m' \tag{h-1}$$

以上から (a)～(g) を用いて，(g-1), (h-1) に代入すると B_n, B_m' に関する無限連立方程式を得ることになり，これを解くことに帰着する．

解析結果については当日発表することにする．