

岩質材料の引張強度に及ぼす結晶粒径の影響について

京都大学 工学部 正員 丹羽 義友
 京都大学 工学部 正員 小林 昭一
 京都大学大学院 学生員 福井 卓雄

1. はじめに

粗粒の岩石とかコンクリートのような微視的構造特性が卓越した材料の破壊強度、特に引張破壊強度は、構造組織の影響を受けることが知られている。従来の弾性論による解析ではこの影響を考慮することが困難であり、最近発展してきた micro-elasticity は微視的構造特性をも考慮して導かれた理論であり、構造組織の卓越した材料の破壊にも十分適用できると考えられる。本報では Mindlin によって提案された couple-stress 理論を用いて円筒状試体ならびに円孔周辺の応力状態を解析し、これを基に構造組織の影響を考察し、実験結果の解釈を試みたものである。

2. 基礎方程式と一般解

couple-stress 理論に関する基礎方程式は以下のようにならされる。

$$\text{構成方程式} \quad T^{\alpha\beta} = G[(u^\alpha|^\beta + u^\beta|^\alpha) + \frac{2\nu}{1-2\nu} q^{\alpha\beta} u^\gamma|_\gamma]$$

$$m^\alpha = 4G l^2 \omega|^\alpha = 4G l^2 k^\alpha$$

$$\text{釣り合い方程式} \quad T^{\alpha\beta}|_\alpha = 0$$

$$m^\alpha|_\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$$

$$\text{適合条件式} \quad \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} d_{\alpha\gamma}|_{\beta\delta} = 0$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} K_{\alpha}|_\beta = 0$$

ただし、上の式において、 T 、 m は Cauchy 応力および couple-stress、 $d_{\alpha\gamma}$ は変位テンソル、 G 、 ν 、 l はせん断弾性係数、ポアソン比、長さの次元を持つ材料定数。 $q^{\alpha\beta}$ 、 $\varepsilon^{\alpha\beta}$ は metric tensor および permutation tensor、 $u^\alpha|_\beta$ 等は曲線座標 x^β による変位微分である。

基礎式と一般解(平面ひずみの場合)

$$\nabla^4 \phi = 0$$

$$\nabla^2(1-l^2\nabla^2)\phi = 0$$

$$(l^2\phi - \phi)|_\alpha = 2(1-\nu)l^2\varepsilon_{\alpha\beta}\nabla^2\phi|^\beta$$

極座標における応力関数 ϕ 、 ϕ の一般解

$$\phi = A_0 r^2 + B_0 \ln r + C_0 \theta$$

$$+ (A_1 r^3 + B_1 \frac{1}{r} + C_1 r \ln r + D_1 r \theta) \cos \theta + (A_1' r^3 + B_1' \frac{1}{r} + C_1' r \ln r + D_1' r \theta) \sin \theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^{n+2} + B_n r^n + C_n r^{-n+2} + D_n r^{-n}) \cos n\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (A_n' r^{n+2} + B_n' r^n + C_n' r^{-n+2} + D_n' r^{-n}) \sin n\theta$$

$$\phi = P_0 \ln r + Q_0 \theta + R_0 \text{Io}(\frac{r}{l}) + S_0 \text{Ko}(\frac{r}{l})$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (P_n r^n + Q_n r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n \text{In}(\frac{r}{l}) + S_n \text{Kn}(\frac{r}{l})) \cos n\theta$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (P_n' r^n + Q_n' r^{-n}) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n' \text{In}(\frac{r}{l}) + S_n' \text{Kn}(\frac{r}{l})) \sin n\theta$$

EEし、適合条件式より係数の間に次の関係がある。

$$P_0 = Q_0 = 0$$

$$P_n = -8(n+1)(1-\nu)l^2 A_n' \quad Q_n = -8(n-1)(1-\nu)l^2 C_n'$$

$$P_n' = 8(n+1)(1-\nu)l^2 A_n \quad Q_n' = 8(n-1)(1-\nu)l^2 C_n$$

応力は応力関数により次のように表わされる。

$$\tau_{\theta\phi} = \varepsilon^{\theta\phi} \varepsilon^{\phi\theta} \phi / r^2 + \varepsilon^{\theta\theta} \phi / r$$

$$m_\alpha = \phi / a$$

3 a. 円筒状試体の応力状態

直径方向に2方向から圧縮線荷重を受ける円筒状試体の外周の境界条件をFourier級数 $p(\theta)$ で表わすと

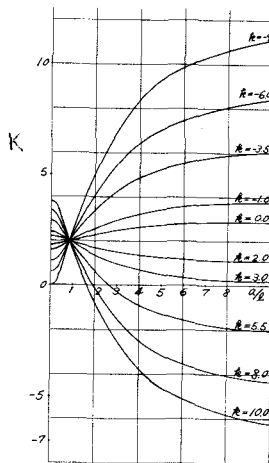
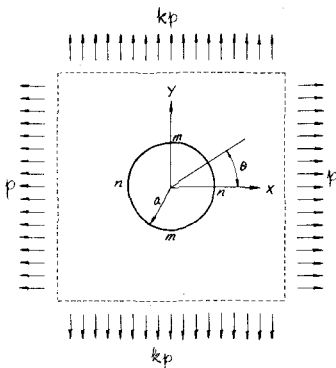
$$\text{外径において} \quad \sigma_r = p(\theta), \quad \tau_{r\theta} = \mu r = 0$$

$$\text{内径において} \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = \mu r = 0$$

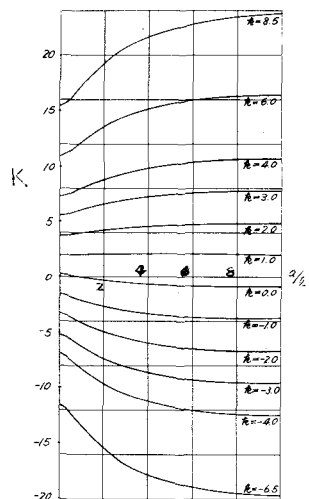
応力状態の対称性を考慮すれば、応力関数中、 n の第 n 次項の未知係数は全部2" 8個となり、適合条件式2個と境界条件式6個より応力関数および応力が決定される。

3 b. 円孔周辺の応力状態

Mindlin'により1軸応力場における円孔周辺の応力状態の解が与えられている。これを2方向に重ね合わせることにより、2軸応力場における応力状態を知ることができる。円孔周上の円周方向応力が極値を取る2点について、2方向の応力の比を変化させたときの応力集中係数を図に示す。これにより、構造組織の大きさに直接関係すると思われる材料定数 k の大きさが応力集中に大きな影響を与えていることがわかる。



$$\sigma_m = Kp$$



$$\sigma_n = Kp$$

文献 1) Mindlin, Influence of couple-stress on stress concentrations. Exp. Mech. 3, 1-7 (Jan. 1963)