

線形粘弾性体内の応力波伝播について

京都大学工学部 正 員 赤井浩一
京都大学大学院 学生員 ○堀 正幸

1. まえがき Morrisonはステップ型の衝撃荷重に対する粘弾性棒内の応力波伝播問題を Laplace 変換を用いて解を得た^(*)。しかし、われわれが粘性土を使って行なってきた縦衝撃実験において、表面で得られる衝撃応力の波形は瞬間的に立ち上がり、指数的に減衰するスパイク型のものである。また、粘性土に衝撃荷重を与える場合、初期には Maxwell 的挙動を示し、比較的時間が経過すれば Voigt 的挙動を示すことも実験から推測することができる。本報告では、Voigt モデルおよび、Maxwell モデルの両方を仮定し、境界条件を実験における表面応力を単純化した指数減衰型として、やはり Laplace 変換を用いて一次元応力波伝播に対する解を得、その数値計算を行なった。

2. 解の誘導 a) Voigt モデルの場合 (Fig. 1)

運動方程式
$$\rho u_{tt} = -\sigma_x \quad (1)$$

ここで、 ρ は密度、 u は変位であり、サフィックス t, x は、それぞれ、時間、位置に関する偏微分を表す。

変位とひずみの関係
$$\epsilon = -u_x \quad (2)$$

構成方程式
$$\sigma = E\epsilon + \frac{1}{\mu} \epsilon_t \quad (3)$$

(1), (2), (3) より
$$\rho \sigma_{tt} = E \sigma_{xx} + \frac{1}{\mu} \sigma_{xt} \quad (4)$$

(4) の σ を v (粒子速度) あるいは u と入れ換えても等価である。(4) より無次元化変数(6)を使って(4)を得る。

$$\Sigma' \tau = \Sigma'_{\xi\xi} + \Sigma'_{\xi\tau} \quad (5)$$

$$\tau = E \mu t, \quad \xi = (\rho E)^{\frac{1}{2}} \mu x, \quad \Sigma' = \sigma(x, t) / \sigma_0 \quad (6)$$

境界条件 $\Sigma'(\infty, \tau) = 0, \quad \Sigma'(0, \tau) = e^{-\beta \tau} \quad (7)$

ラプラス変換式 $\mathcal{L}\{f(\xi, \tau)\} = \int_0^\infty e^{-\xi \tau} f(\xi, \tau) d\tau \quad (8)$ を用いて

(5) より $\xi^2 \mathcal{L}\{\Sigma'\} = (1 + \beta) \mathcal{L}\{\Sigma'\}_{\xi\xi} \quad (9)$

(6) より $\mathcal{L}\{\Sigma'(\infty, \tau)\} = 0, \quad \mathcal{L}\{\Sigma'(0, \tau)\} = \frac{1}{\beta + 1} \quad (10)$

(9) の常微分方程式を(10)のもとで解いて

$$\mathcal{L}\{\Sigma'(\xi, \tau)\} = \frac{1}{\beta + 1} \exp\left(-\frac{\xi \beta}{\sqrt{1 + \beta}}\right) \quad (11)$$

(11) を逆変換することにより、

$$\Sigma'(\xi, \tau) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \exp(-\beta \tau) \int_0^\tau \frac{g(\tau, \eta)}{\sqrt{\eta^3}} \exp\left\{(\beta + 1)\eta - \frac{\xi^2}{4\eta}\right\} d\eta \quad (12)$$

ここで $g(\tau, \eta) = \int_0^{\tau-\eta} \left\{ \delta(\zeta) - \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(\sqrt{\zeta \eta}) \right\} d\zeta$

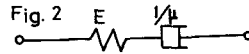
J_1 : 第1種第1次 Bessel 関数

(*) J.A. Morrison Wave propagation in rods of Voigt material and Viscoelastic materials with three parameter models. Qu. Appl. Math. Vol. 14 (1956) p. 153 ~ 169

しかし、 $\beta=1$ のときは別の逆変換形を用いることにより次式を得る。

$$\Sigma'(\xi, \tau) = \frac{e^{-\tau}}{\pi} \int_0^{\tau} \left[\frac{\cos\{2\sqrt{\eta(\tau-\eta)}\}}{\sqrt{\eta(\tau-\eta)}} - \frac{\sin\{2\sqrt{\eta(\tau-\eta)}\}}{\eta} \right] \exp\left(2\eta - \frac{\xi^2}{4\eta}\right) d\eta \quad (13)$$

6) Maxwell モデルの場合 (Fig. 2)



上と同じ手法により次の解を得る。

$$\begin{aligned} \Sigma'(\xi, \tau) = & \exp\left\{\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\xi - \beta\tau\right\} \\ & + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\tau} \exp\left\{\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\eta - \beta\tau\right\} \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi^2}} I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) d\eta \quad (14) \end{aligned}$$

($\tau \geq \xi$)

ただし $I_1(x) = \frac{1}{2} J_1(2x)$

J_1 : 第一種第一級 Bessel 関数

3. 計算結果 Fig. 3 と Fig. 4 は、それぞれ (13) と (14) を Simpson の積分公式により、京都大学計算センター FACOM 230-60 で数値計算した結果を示したものである。どちらの場合でも、 $\beta=0$ のとき境界応力はステップ型となり Morrison の解に一致するが、(12)、(14) から予測されるように β が大きくなるにつれ、波の進行とともに応力は急激に減衰する。Voigt モデルでは、その機構から

知られるとおり、衝撃を受けた瞬間に完全剛体の性質を示し、無限大の波速で wave front が進行する。また、各深さにおける波形の継続時間は Maxwell モデルに比較して波の進行とともに非常に大きくなり、波形のくずれが著しい。一方、Maxwell モデルの場合、

wave front の波速は $\sqrt{E/p}$ であり、front が明瞭な衝撃面をもっている。しかし、(14) の右辺第一項からわかるように、衝撃面での応力はどのような β の境界応力を与えても、その減衰は $\exp(-0.5\tau)$ に従う。これら二つのモデルに対する計算結果は、粘性土を使って行なった衝撃実験で得られた諸現象と比較的によく説明しているものと思われる。この研究に対して、昭和44年度文部省科学研究費の援助を受けた。

