開水路流れにおける乱れの相似性について

京大防災研究所　正員　今本博健

一般に，十分にReynolds数の大きい流れにおいては，乱れ特性に関し種々の相似性が存在するものと考えられる。２次元流れの平均流速分布に対するdefect law表示は相似性を示す一例である。Engelund[1]は，乱れの特性量を水深と摩擦速度とによって表わすことができるとし，平均スケールをこれらの量によって無次元化されたものの水深方向の分布は相対水深の普遍関数（universal function）で表わされることを示している。以下においては，乱れ特性量間の相互関係について明らかにするとともに，種々の乱れ特性量に対する無次元表示について考察する。

1、乱れ特性量間の相互関係

流れ方向の乱れの強さを u'，平均スケールを L，エネルギー逸散率を ϵ とすると，これらの量の間にはつぎの関係が成立することがTaylor[2]によって示されている。

$$\epsilon \sim \frac{u'^3}{L} \qquad \text{すなわち} \qquad \epsilon = C_L\frac{u'^3}{L} \tag{1}$$

C_Lは比例定数であって普遍定数（universal constant）と考えられる。C_Lはつぎのようにして推定することができる。いま，1次元エネルギースペクトル関数 $S(n)$ として，1) $\int_0^\infty S(n)dn = u'^2$，2) $S(0)=4u'^2\frac{L}{U}$（U：平均流速），3) $S(n)\sim n^{-\frac{5}{3}}$（$n$：大）を満足するようにつぎの関数形を仮定する。すなわち，

$$S(n) = 4u'^2\frac{L}{U}\Big/\left(1+6\frac{L}{U}n\right)^{\frac{5}{3}} \tag{2}$$

また，慣性域におけるスペクトル関数としてKolmogoroffの相似則より得られるつぎの表示を用いる。すなわち，

$$S(n) = A_n(U\epsilon)^{\frac{2}{3}}n^{-\frac{5}{3}} \tag{3}$$

ここに，A_nはスペクトル定数といわれる普遍定数であって，余越[3]と同様に $A_n\approx 0.138$ とすると，$C_L\approx 1.77$ となる。

一方，等方性一様乱流場においては，エネルギー逸散率 ϵ はつぎのように表わされる。

$$\epsilon = \nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)} = 15\nu\frac{u'^2}{\lambda^2} \tag{4}$$

ここに，λはTaylor's microscaleであって次式により定義される。

$$\frac{1}{\lambda^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1-R(x)}{x^2} = 2\lim_{t\to 0}\frac{1-R(t)}{U^2t^2} = \frac{4\pi^2}{U^2}\int_0^\infty n^2\frac{S(n)}{u'^2}dn \tag{5}$$

以上より，

$$\epsilon = C_L\frac{u'^3}{L} = C_\lambda\frac{u'^3}{\lambda^2} \quad (C_L\approx 1.77,\ C_\lambda = 15\ (\text{等方性一様乱流場})) \tag{6}$$

の関係が成立することがわかる。

2．乱れ特性量に対する普遍関数表示

乱れのエネルギー式は近似的につぎのように表わされる。

$$[\text{生成量}] \approx [\text{拡散量}] + [\text{逸散量}] \tag{7}$$

２次元開水路流れの場合，[生成量]はつぎのように表わすことができる。すなわち，Reynolds応力は自由表面におけるzeroから路床に向って直線的に増加し，平均流速分布は対数則で表わされるとすると，水深Hの場合，[生成量]は，

$$[\text{生成量}] = -\overline{uw}\frac{\partial U}{\partial z} = u_f^2\left(1-\frac{z}{H}\right)\frac{u_f}{\kappa z} \quad (u_f\text{：摩擦速度},\ \kappa\text{：Kármán定数}) \tag{8}$$

となる。したがって，[生成量]$/u_f^3H^{-1}$は，κを一定とすると，$\frac{z}{H}$のみの

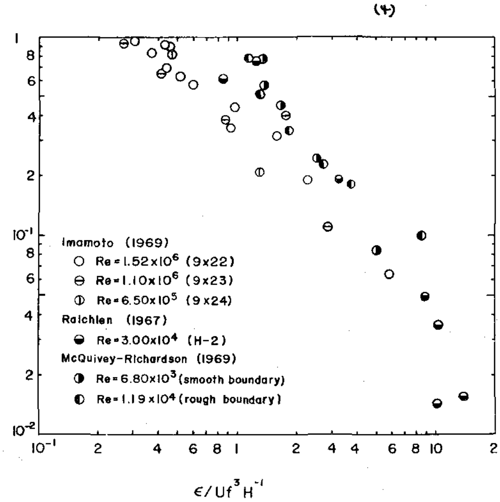

fig.1　エネルギー逸散率と相対水深の関係.

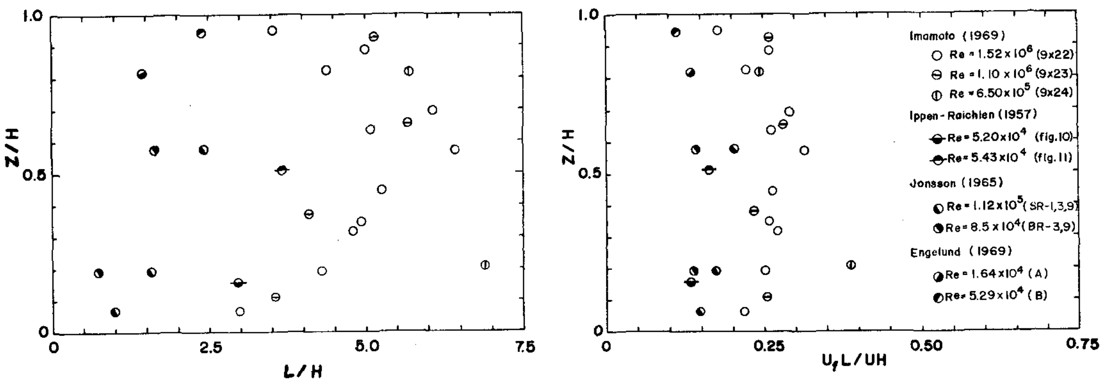

fig. 2　平均スケールと相対水深の関係

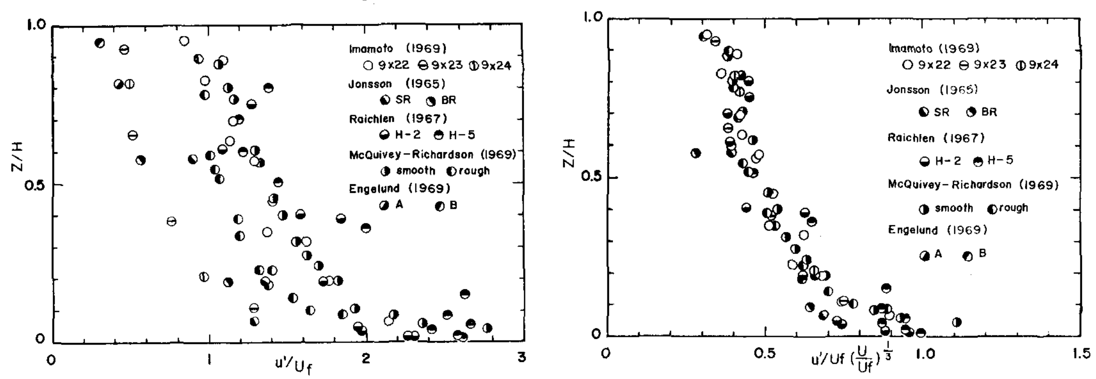

fig. 3　乱れの強さと相対水深の関係

普遍関数となる。これより類推して[逸散量]$/u_f^3H^{-1}$もまた$\frac{z}{H}$のみの普遍関数によって表わされるとするとつぎのようになる。

$$\frac{\epsilon}{u_f^3 H^{-1}} = \phi_\epsilon\left(\frac{z}{H}\right) \qquad (9)$$

一方，流れ方向の平均スケール L は u_f と H とによって決められると仮定すると次元解析的につぎの関係が得られる。

$$\frac{L}{\left(\frac{U}{u_f}\right)H} = \phi_L\left(\frac{z}{H}\right) \qquad \text{(ただし，次元解析は } T_E=\tfrac{L}{U} \text{ について行なう)} \qquad (10)$$

(9)および(10)式を(6)式に用いると，乱れの強さおよび Taylor's microscale に対する普遍関数表示として次式が得られる。

$$\frac{u'}{u_f\left(\frac{U}{u_f}\right)^{\frac{1}{3}}} = \phi_u\left(\frac{z}{H}\right) \qquad (11) \qquad\qquad \frac{\lambda}{H\left(\frac{u_f H}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U}{u_f}\right)^{\frac{1}{3}}} = \phi_\lambda\left(\frac{z}{H}\right) \qquad (12)$$

(11)式は，Monin-Obukhov の相似則において，長さのスケールとして水深を用いた場合の表示式 $\frac{u'}{u_f}=\phi_u'\left(\frac{z}{H}\right)\cdots(11')$ と比較すると $\left(\frac{U}{u_f}\right)^{\frac{1}{3}}$ がパラメーターとして入っていることがわかる。u' に対し(11')の表示を用いると，(10)は $\frac{L}{H}=\phi_L'\left(\frac{z}{H}\right)\cdots(10')$ となる。なお，Engelund は，L については(10)式を u' については(11')式を採用している。L については Jonsson[4] も表示法は異なるが同じ内容のことを表わしている。

以上の普遍関数表示の妥当性を検討するため実測値を示したのが fig. 1～3 である。fig. 1 はエネルギー逸散率と相対水深との関係を示したものであって，Raichlen[5] および McQuivey-Richardson[6] の結果は著者によるものよりかなり大きめの傾向があるが，これは ϵ の求め方の差異によるものと思われる。平均スケールの求め方には種々の方法があり，この値を決定することはかなり困難なため，算定法の妥当と考えられる Ippen-Raichlen[7]，Jonsson[4]，Engelund[1] および著者の結果のみについて表わしたのが fig. 2-a および b である。fig. 2 では(10)と(10')式との優位性を判断することは困難である。fig. 3 は乱れ計測においてはもっとも確実性の高い u' について(11)と(11')式とを比較したものであるが，これによれば(11)式の方が秀れているように思われるが，今後の検討に残されるところが多い。

文献　1) Engelund, ASCE, HY4, 1969-7.　2) Taylor, Proc. Roy. Soc. A151, 1935.
3) 余越，京大防災研年報，昭43.　4) Jonsson, ACTA, C131, 1965,　5) Raichlen, ASCE, EM2, 1967-4.
6) McQuivey-Richardson, ASCE, HY1, 1969-1,　7) Ippen-Raichlen, ASCE, HY5, 1957-10.