内部波の発達に関する一考察

京都大学工学部　正員　岩佐 義朗
〃　〃　〃　○井上 和也

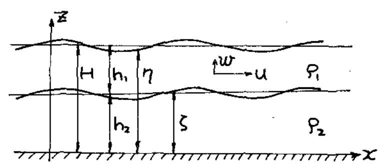
1.まえがき

淡・塩水よりなる二成層流の境界面に発生する内部波について，著者らは前報*)において，風波との比較に注目し，とくに流下にともなう発達過程を中心に実験的に二，三考察を試みてきた。その結果，内部波の発達過程はいわゆるKeulegan数と密接な関係にあることが認められた。本報は，静止した塩水上を淡水が流下する場合の内部波に，風波におけるSverdrup, Munkの理論を適用し，その発達あるいは減衰特性を明らかにしようとしたものである。

2.Energy式

x軸を水平とする座標系を図-1のようにとる。せん断応力として境界面に作用するもののみを考慮すれば，上層のエネルギー式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\zeta}^{\eta}\frac{q^2}{2}dz+g\eta\frac{\partial\eta}{\partial t}-g\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_{\zeta}^{\eta}u\left(\frac{q^2}{2}+\frac{p}{\rho_1}+gz\right)dz-\left(\frac{p}{\rho_1}\right)_{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=(u\tau)_{\zeta} \tag{1}$$



図－1

ただし，$q^2=u^2+w^2$，τ:境界面におけるせん断応力，であり，添字ζは$z=\zeta$での値であることを示す。

ここでつぎの仮定を設ける。

i) 内部波の発達状況は時間に無関係な状態にある。すなわち，$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\zeta^2}=0$，$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\int_{\zeta}^{\eta}q^2/2\,dz}=0$

ii) 自由表面は静水面で近似され，かつ時間的な変動はない。($H=h_1+h_2$: const，$\partial\eta/\partial t=0$)

iii) 内部波の波高はh_1に比し十分小さく，積分の下限および添字ζはh_2で置き換えられる。

以上の仮定を用いて(1)式を平均すれば，次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{h_2}^{H}\overline{u\left(\frac{q^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)}dz-\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)_{h_2}\frac{\partial\zeta}{\partial t}}=\overline{(u\tau)}_{h_2} \tag{2}$$

一方，上層の流れを一様な平均流u_1に内部波による波動が重なったものとすれば，平均流に関するEnergy式はつぎのように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{h_2}^{H}\bar{u}\left(\frac{\overline{q^2}}{2}+\frac{\bar{p}}{\rho}+gz\right)dz=(\bar{u}\bar{\tau})_{h_2} \tag{3}$$

3.内部波の発達過程

上述のような流れのポテンシャルϕは，内部波が微小振幅波理論によって表わされるとすれば

$$\phi=-u_1x+\frac{a(u_1-c)}{\sinh kh_1}\cosh k(z-H)\cos k(x-ct) \tag{4}$$

である。ここで

$$c=\frac{\rho_1u_1\coth kh_1}{\rho_1\coth kh_1+\rho_2\coth kh_2}+\sqrt{\frac{(\rho_2-\rho_1)g}{k(\rho_1\coth kh_1+\rho_2\coth kh_2)}-\frac{\rho_1\rho_2u_1^2\coth kh_1\coth kh_2}{(\rho_1\coth kh_1+\rho_2\coth kh_2)^2}} \tag{5}$$

$$\zeta = h_2 + a \sin k(x - ct) \tag{6}$$

であり，k は波数である。

内部波の存在しないときの自由表面の圧力を標準にとれば

$$\frac{p}{\rho_1} = \frac{ak(u_1^2 - c^2)}{\sinh kh_1} \cosh k(z - H) \sin k(x - ct) + g(H - z) \tag{7}$$

(2)，(3)式に(4)，(7)式を適用しその両辺を差し引くことにより，内部波に関するEnergy式が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{a^2 k (u_1 - c)^2 (2u_1 + c)}{4 \tanh kh_1} \left(1 + \frac{2kh_1}{\sinh 2kh_1}\right) \right\} - \overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)_{h_2} \frac{\partial \zeta}{\partial t}} = \overline{(u\tau)}_{h_2} - (\bar{u}\,\bar{\tau})_{h_2} \tag{8}$$

さて，(8)式の左辺才2項は法線応力のなす仕事であって，微小振幅波理論によればその平均値は0であるが，本報ではJeffreys の遮蔽の概念にならって，次式が成立するものとする。

$$\overline{\left(\frac{p}{\rho}\right)_{h_2} \frac{\partial \zeta}{\partial t}} = -\frac{s}{2}(u_1 - c)|u_1 - c| k^2 a^2 c \tag{9}$$

ここで，s は遮蔽係数であり，負号は $u_1 > c$ のとき上層が下層に対して仕事をなすことを意味する。

一方，(8)式の右辺についてはつぎのように仮定する。

$$\overline{(u\tau)}_{h_2} = (1 + \alpha)(\bar{u}\,\bar{\tau})_{h_2} \tag{10}$$

また，境界面での抵抗係数 γ^2 によって，$\tau_{h_2} = \rho_1 \gamma^2 u_1^2 / 2$ と表わされる。

以上の仮定を用い，また $kh_1 \gg 1$ とすれば(8)式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{a^2 k (u_1 - c)^2 (2u_1 + c)}{4} \right\} = \frac{\alpha \gamma^2 u_1^3}{2} - \frac{s}{2}(u_1 - c)|u_1 - c| k^2 a^2 c \tag{11}$$

ここで，$c = \frac{u_1}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon g}{2k} - \frac{u_1^2}{4}}$ ，$\varepsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ (12)

4. 波齢とSteepness

(11)式に風波におけるSverdrup, Munkの方法を適用する場合，波齢 $\beta (= c/u_1)$ とSteepness δ $(= ak/2\pi)$ との関係を求めなければならない。図-2は，岡崎および著者らの実験結果より β と δ の関係を示したものである。

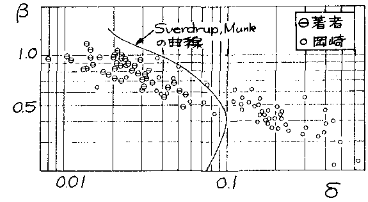


図-2

いま β と δ の間に普遍的な関係を仮定すれば，(11)式は(12)式を用いてつぎのようになる。

$$\frac{d\beta}{df} = \frac{A}{\delta^2} \frac{1 - s'\beta(1-\beta)|1-\beta| - \{(2\beta-1)^2+1\}(1-\beta)^2(2+\beta)g(x)}{\{(2\beta-1)^2+1\}\left[(1-\beta)^2(2+\beta)\left\{\frac{2}{\delta}\frac{d\delta}{d\beta} + \frac{8\beta-4}{(2\beta-1)^2+1}\right\} + 3(\beta^2-1)\right]}$$

ここで，$A = 16\pi^2 \alpha \gamma^2$，$s' = s/4\pi\alpha\gamma^2$，$f = \int^x \varepsilon g / u_1^2 \, dx$，$g(x) = (5u_1/16\pi^2 \varepsilon g \alpha \gamma^2)\, du_1/dx$ である。以上から，u_1 の流下方向の変化，抵抗係数および $d\delta/d\beta$ が知られれば，α，s' を仮定することにより，(13)式は数値計算される。その詳細は講演時に述べる予定である。

文献 1) 岩佐義朗，井上和也，竹林征三 "二成層流における内部波の特性について" 昭和45年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要