長波の変形に関する一考察

京都大学工学部　正員　岩垣 雄一
京都大学大学院　学生員　○酒井 哲郎

1. まえがき

深海から浅海に進入した波の波形の変化を，理論的に取扱った研究は少ない。Biesel[1]は，速度ポテンシャルを仮定して，斜面上の波の波形をパラメーター表示し，波形の平均的な傾きを導いた。しかし，その表現に現われるパラメーターには，波数の距離に関する積分が含まれており，これらの式を用いて，他の水理量を解析的に求めることは困難である。一方，Carrier－Greenspan[2]は，Friedrichs の導いた shallow water theory の第一次基本方程式を用い，変数変換を行なって線型な方程式を導き，その解を Bessel 関数で表現したが，変数変換の結果では，直接に空間，時間の変数が現われず，やはり他の水理量を求めるのは困難である。ここでは，基本方程式としては，同じく shallow water theory の第1次の式を用いるが，その非線型性を考慮し，水位および水粒子速度を，せつ動表示して，その第2近似解を求めて波形の変化を説明しようとするものである。

2. 基礎方程式と第1近似解

基礎方程式は，便宜上，Friedrichs によるものではなく，Lamb によるもの，すなわち，

$$u_t + u\cdot u_x + g\cdot\eta_x = 0\ ,\quad \eta_t + [u\cdot(\eta+h)]_x = 0\ , \tag{1}$$

を用いる。ここで，t は時間，x は汀線を原点とし沖側を正とする水平方向座標，u は x 軸に垂直な断面での平均水粒子速度，η は静水面からの水位，g は重力加速度，h は静水深である。1. で述べたように，η および u を微小量 α $(\alpha \ll 1)$ のべき級数，

$$\eta = \alpha\cdot\eta^{(1)} + \alpha^2\cdot\eta^{(2)} + \cdots\cdots\ ,\quad u = \alpha\cdot u^{(1)} + \alpha^2\cdot u^{(2)} + \cdots\cdot\ , \tag{2}$$

で表現できると仮定する。(2) 式を (1) 式に代入すると，α の係数として，$\eta^{(1)}$ および $u^{(1)}$ に関する線型方程式が得られ，その解は，本間[3]が，幅および水深が直線的に変化する湾に進入した津波の解として与えているが，とくに水深のみが変化する場合（ここで $h = i\cdot x$ とし，i は底勾配）の x の負の方向（岸向き）に進行する波の解は，

$$\eta^{(1)}(x,t) = a\left\{\cos\sigma t\cdot J_0\left(2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}\right) - \sin\sigma t\cdot Y_0\left(2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}\right)\right\} \tag{3}$$

であらわされる。ここで，a は定数，σ は $2\pi/T$（T は波の周期），J_0 および Y_0 はそれぞれ第1種および第2種の Bessel 関数である。(3) 式を見てわかるように，Bessel 関数の性質から，水深の減少にともなう波高増加，また，Bessel 関数の中の x の形から波長の変化が説明できるが，時間 t に関する変化は，$t=0$ に関して対称の形のままである。

3. オ2近似解

(2) 式を (1) 式に代入して得られる方程式の，α^2 の係数から，$\eta^{(2)}$ および $u^{(2)}$ の満たすべき方程式が得られ，$u^{(2)}$ を消去すれば，次式が得られる。

$$\eta^{(2)}_{tt} - g\left[\eta^{(2)}_{xx}\cdot ix + \eta^{(2)}_{x}\cdot i\right] = -\left[u^{(1)}\cdot\eta^{(1)}\right]_{xt} + \left\{u^{(1)}\cdot u^{(1)}_{x}\right\}_{x}\cdot ix + \left\{u^{(1)}\cdot u^{(1)}_{x}\right\}\cdot i \qquad (4)$$

(4) 式に (3) 式および (3) 式から得られる $u^{(1)}$ の解を代入し，一応 t に無関係な項を無視すると，(4) 式の右辺は，

$$\cos 2\sigma t\left\{-\frac{3}{2}a^2\frac{\sigma^2}{i}x^{-1}\left(J_0^2-J_1^2-Y_0^2+Y_1^2\right)+\frac{5}{2}a^2\sqrt{\frac{g}{i}}\,\sigma x^{-\frac{3}{2}}\left(J_0J_1-Y_0Y_1\right)-a^2g\,x^{-2}\left(J_1^2-Y_1^2\right)\right\}$$

$$+\sin 2\sigma t\left\{3a^2\frac{\sigma^2}{i}x^{-1}\left(J_0Y_0-J_1Y_1\right)-\frac{5}{2}a^2\sqrt{\frac{g}{i}}\,\sigma x^{-\frac{3}{2}}\left(J_1Y_0+J_0Y_1\right)+2a^2g\,x^{-2}\cdot J_1Y_1\right\}, \qquad (5)$$

となる。ここでは，解が求めやすいように，Bessel 関数を，その近似表現，

$$J_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad Y_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad |z|\to\infty, \qquad (6)$$

を用いて変形すると，(5) 式の $\cos 2\sigma t$ および $\sin 2\sigma t$ の係数は，それぞれつぎのようになる。

$$-3a^2\frac{\sigma}{\pi}\sqrt{\frac{g}{i}}\,x^{-\frac{3}{2}}\cos\left\{2\left(2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}+\frac{5}{2}a^2\frac{g}{\pi}x^{-2}\sin\left\{2\left(2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}+a^2\frac{g}{\pi\sigma}\sqrt{gi}\,x^{-\frac{5}{2}}\cos\left\{2\left(2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}. \qquad (7)$$

$$3a^2\frac{\sigma}{\pi}\sqrt{\frac{g}{i}}\,x^{-\frac{3}{2}}\sin\left\{2\left(2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}+\frac{5}{2}a^2\frac{g}{\pi}x^{-2}\cos\left\{2\left(2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-a^2\frac{g}{\pi\sigma}\sqrt{gi}\,x^{-\frac{5}{2}}\sin\left\{2\left(2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}. \qquad (8)$$

(7) 式と (8) 式の各項の係数はその符号を除いて一致しており，その大きさを比較すると，O(オ2項/オ1項) $= i$，O(オ3項/オ1項) $= i^2$ であるから，$i \ll 1$ として，オ3項を無視することにする。いま，$\eta^{(2)}(x,t)=\cos 2\sigma t\cdot A(x)+\sin 2\sigma t\cdot B(x)$ と仮定し，(4) 式の右辺として (7) 式および (8) 式を満たすような $\eta^{(2)}$ を求め，若干の変形を行なうと，結局 $\eta^{(2)}$ は次式のように与えられる。

$$\eta^{(2)}(x,t)=\frac{a^2}{\pi i}\frac{1}{x}\cos\left\{2\left(\sigma t+2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\left(\frac{3}{10}\frac{\sqrt{gi}}{\sigma}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right\} \qquad (9)$$

一方，$\eta^{(1)}$ も (6) 式を用いて表わすと，次式のようになる。

$$\eta^{(1)}(x,t) = a\left(\frac{\sqrt{gi}}{\pi\sigma}\right)^{1/2}\frac{1}{x^{1/4}}\cos\left(\sigma t+2\sigma\sqrt{\frac{x}{gi}}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (10)$$

なお，(9)，(10) 式の解釈，その適用範囲，および計算例については，講演時に述べる。

参考文献

1) Biesel, F.: Study of wave propagation in water of gradually varing depth, Gravity waves circular No. 521, Nat. Bureau of Standards Washington D.C., 1951.

2) Carrier, G. F. and H. P. Greenspan: Water waves of finite amplitude on a sloping beach, Jour. of Fluid Mech., Vol. 4, 1958, pp. 97-109.

3) 本間 仁：長波の変形について，土木学会誌，オ19巻，1933.