

四辺形板の曲げ解析

大阪市大 正員 倉田 宗章
 大阪市大 正員 〇谷 平 勉

§1. まえがき. 異形平板の曲げについて、従来から多くの研究者によって、種々の方法が提起され、対象とする板によって解析法が研究されている。本研究は、四辺形板について、板のたわみ関数として、境界条件を満足する級数を用い、板内でつり合方程式を満たせるように関数を決定する、いわば、“板内選定法”というべき方法の妥当性を検討したものである。板内各点を表現しうる座標系として図のような、 i, j 座標を用い、たわみ関数として、2重級数を使う。最終的には無限連立一次方程式を解くことになるが、数値的には、有限項で計算してその収束性を調べたものである。この“板内選定法”は、等厚板のみならず変厚板についても、板のつり合方程式が少し複雑になるだけで一般性は失なわれない。

この報告では、全周単純支持の等厚板、および変厚板について解析した結果を示す。

§2. 座標変換. (i, j) 系を (x, y) 系に変換

$$\begin{aligned}
 x &= F(i, j) = [x_3 i + x_2 (1-i)]j + [x_4 i + x_1 (1-i)](1-j) \\
 y &= G(i, j) = [y_3 i + y_2 (1-i)]j + [y_4 i + y_1 (1-i)](1-j)
 \end{aligned} \quad \text{--- (1)}$$

$ \begin{Bmatrix} f_{xx} \\ f_{xy} \\ f_{yy} \\ \Delta f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_{ii} \\ f_{jj} \end{Bmatrix} $	$ \begin{aligned} X_1 &= \frac{2}{j^2} G_i G_j B_j \\ X_2 &= \frac{2}{j^2} G_i G_j B_i \\ X_3 &= \frac{1}{j^2} G_j^2 \\ X_4 &= \frac{2}{j^2} G_i G_j \\ X_5 &= \frac{1}{j^2} G_i^2 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{j^2} (F_i G_j + F_j G_i) B_j \\ T_2 &= -\frac{1}{j^2} (F_i G_j + F_j G_i) B_i \\ T_3 &= -\frac{1}{j^2} F_j G_j \\ T_4 &= \frac{1}{j^2} (F_i G_j + F_j G_i) \\ T_5 &= -\frac{1}{j^2} F_i G_i \end{aligned} $	$ \begin{aligned} Y_1 &= \frac{2}{j^2} F_i F_j B_j \\ Y_2 &= \frac{2}{j^2} F_i F_j B_i \\ Y_3 &= \frac{1}{j^2} F_j^2 \\ Y_4 &= -\frac{2}{j^2} F_i F_j \\ Y_5 &= \frac{1}{j^2} F_i^2 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} R_1 &= X_1 + Y_1 \\ R_2 &= X_2 + Y_2 \\ R_3 &= X_3 + Y_3 \\ R_4 &= X_4 + Y_4 \\ R_5 &= X_5 + Y_5 \end{aligned} $	--- (2)
--	--	--	---	--	---------

$ \begin{aligned} J &= F_i G_j - F_j G_i \\ B_i &= \frac{1}{j} (F_i G_j - G_i F_j) \\ B_j &= \frac{1}{j} (G_i F_j - F_j G_i) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} F_i &= \alpha_1 j + \beta_1 \\ F_j &= \alpha_1 i + \delta_1 \\ F_j &= \alpha_1 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} G_i &= \alpha_2 j + \beta_2 \\ G_j &= \alpha_2 i + \delta_2 \\ G_{ij} &= \alpha_2 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \alpha_1 &= x_3 - x_2 + x_1 - x_4 \\ \beta_1 &= x_4 - x_1 \\ \delta_1 &= x_2 - x_1 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \alpha_2 &= y_3 - y_2 + y_1 - y_4 \\ \beta_2 &= y_4 - y_1 \\ \delta_2 &= y_2 - y_1 \end{aligned} $	--- (3)
--	--	---	--	--	---------

§3. 等厚板の場合. 板の方程式 $\Delta W = q/D$ を

$$\begin{cases} \Delta W = 0 & \text{--- (4)} \\ \Delta U = q/D & \text{--- (5)} \end{cases}$$
 に分ける。

単純支持の条件 $W = U = 0$ を満すように W, U を次のような2重級数で表現する。

$$W = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin m\pi i \sin n\pi j \quad \text{--- (6)}$$

$$U = \sum_m \sum_n b_{mn} \sin m\pi i \sin n\pi j \quad \text{--- (7)}$$

$$\begin{aligned}
 U_i &= \sum_m \sum_n b_{mn} \cdot A_1 & A_1 &= m\pi \cos m\pi i \sin n\pi j \\
 U_j &= \sum_m \sum_n b_{mn} \cdot A_2 & A_2 &= n\pi \sin m\pi i \cos n\pi j \\
 U_{ii} &= \sum_m \sum_n b_{mn} \cdot A_3 & A_3 &= -m^2\pi^2 \sin m\pi i \sin n\pi j \\
 U_{ij} &= \sum_m \sum_n b_{mn} \cdot A_4 & A_4 &= m\pi n^2 \cos m\pi i \cos n\pi j \\
 U_{jj} &= \sum_m \sum_n b_{mn} \cdot A_5 & A_5 &= -n^2\pi^2 \sin m\pi i \sin n\pi j
 \end{aligned}
 \quad (8)$$

$$\Delta U = R_1 U_i + R_2 U_j + R_3 U_{ii} + R_4 U_{ij} + R_5 U_{jj} \quad \text{--- (9)}$$

$$= \sum_m \sum_n b_{mn} \cdot \beta = q/D \quad \text{--- (10)}$$

ここで $\beta = \overline{R_k A_k} \quad (= \sum_{k=1}^5 R_k A_k)$
 問題は与えられた $q(i, j)$ のもとで未定係数 $\{b_{mn}\}$ を定めることに帰する。板内の任意の点で

(9)式が成立する。その偏数だけ、板内各点で(8)式を作ると、 $\{b_{mn}\}$ を未知数とする連立方程式ができる。

$$\left[\beta_{mn, ij} \right] \left\{ b_{mn} \right\} = \left\{ q_{ij} \right\} \quad \text{--- (11)}$$

これを解いて求まる $\{b_{mn}\}$ を(7)式に代入し、全く同様の手順を(4)式について行

えばたわみを決定することができる。

§4. 変厚板の場合 等方性変厚板のつり合方程式 $\Delta[D \cdot \Delta W] - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2 \partial x^2} \right] \quad \text{--- (12)}$

を $\Delta W = U$ --- (13) に分け、 W, U に対しては、等厚板の場合と同様、(6), (7)式と仮定する。 D は連

$$\Delta[D \cdot U] - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2 \partial x^2} \right] \quad \text{--- (14)}$$

続関数で与えられるものとし、 $D_i = D_0 \cdot D_1, D_j = D_0 \cdot D_2, D_{ii} = D_0 \cdot D_3, D_{ij} = D_0 \cdot D_4, D_{jj} = D_0 \cdot D_5, D = D_0 \cdot D_0$ とおく。(D_0 は中央点 $i=j=0.5$ の板剛度)。又 $\sin m\pi i \sin n\pi j = A_0$ とおくと、(13), (14)式は、

$$\begin{aligned}
 \sum_m \sum_n b_{mn} \cdot \alpha - \sum_m \sum_n a_{mn} \cdot \beta &= 0 & \alpha &= A_0, & \beta &= \overline{R_k A_k} \\
 \sum_m \sum_n [b_{mn} \cdot \delta - a_{mn} \cdot \gamma] &= q & \gamma &= \{ \overline{D_k R_k} \cdot A_0 + D_1 (2R_3 A_1 + R_4 A_2) + D_2 (R_4 A_1 + 2R_5 A_2) + D_0 \cdot \overline{R_k A_k} \} D_0 \\
 & & \delta &= (1-\nu) \{ \overline{D_k X_k} \cdot \overline{Y_k A_k} - 2 \overline{D_k T_k} \cdot \overline{T_k A_k} + \overline{D_k Y_k} \cdot \overline{X_k A_k} \} D_0
 \end{aligned}
 \quad \text{--- (15)}$$

これらの式も未知係数の数 ($= \{b_{mn}\}$ の項数, $= \{a_{mn}\}$ の項数) だけ、板内各点で作ると、次のような連立方程式系ができる。これを解くと、

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} K_{ij} \\ (i,j) \text{ 点} \end{matrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix} \begin{matrix} K_{ij} \\ (i,j) \text{ 点} \end{matrix} \begin{bmatrix} \{b_{mn}\} \\ \{a_{mn}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{D\} \\ \{q\} \end{bmatrix} \quad \text{--- (16)}
 \end{aligned}$$

$$\{b_{mn}\} = ([\gamma] - [\delta][\beta]^{-1}[\alpha])^{-1} \{q\} \quad \text{--- (17)}$$

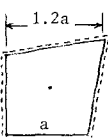
$$\{a_{mn}\} = [\beta]^{-1}[\alpha] \cdot \{b_{mn}\} \quad \text{--- (18)}$$

となり未知数も決定できる。

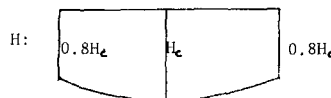
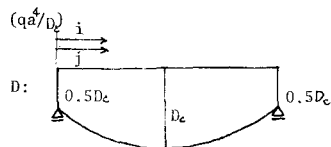
§5. 数値計算例. ポアソン比 $\nu=0.3$, 等分布荷重の場合について計算した結果を示す。

i) 等厚板

M N	at center		Def. (qa^3/D) Mom. (qa^2)	
	DEFLECTION		Max-MOMENT	
4	0.00369	9.1%	0.0448	6.4%
6	0.00389	4.2	0.0463	3.2
8	0.00397	2.2	0.0471	1.8
10	0.00400	1.5	0.0473	1.2
EXACT: 0.00406			0.0479	
4	0.00516	8.8	0.0551	6.2
6	0.00545	3.7	0.0575	2.1
8	0.00556	1.8	0.0580	1.1
10	0.00560	1.0	0.0584	0.4
EXACT: 0.00566			0.0587	



M N	CENTER DEFLECTION
4	0.00434
6	0.00481
8	0.00500
4	0.00606
6	0.00672
8	0.00698



§6. 結び. この板内選定法は、理論的に簡潔で、わずかの計算時間で実用上十分と思われ結果を得た。今後更に、荷重の形と選定位置のとり方との関連性、他の境界条件が混合する場合の収束性等について検討を加えていきたいと思っている。