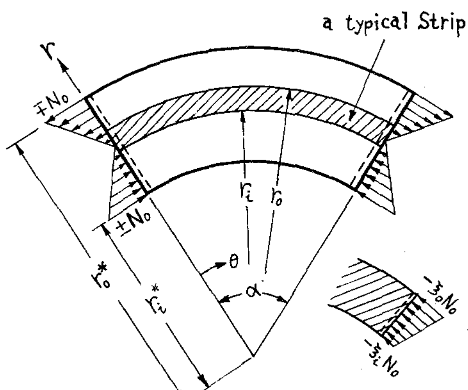
Finite Strip Method による扇形板の曲げ座屈

関西大学工学部　正会員　三上市蔵
〃　〃　○武田八郎
〃　〃　赤松洋一
〃　〃　米沢博

1．まえがき　極異方性扇形板の曲げ座屈については，すでにFrobeniusの方法を用いて厳密解を誘導し[1]，さらにGalerkin法を用いて近似解を誘導した[2]。厳密解によると係数行列式の値を０にするような座屈荷重を走査法によって数値計算しなければならず，計算時間を多く要する。Galerkin法によれば適当な項数を考え行列の固有値を求めればよく，計算時間の上では有利であるが，行列の性質が悪く桁落ちが顕著である。今回採用した解析法Finite Strip Methodは，一方向の境界条件を満足する連続函数を変位函数として用いるので，有限要素法に比べて行列の大きさが小さくなり，プログラミングが容易であり，また行列の性質が良い。扇形板の境界条件としては，直線辺が単純支持され，曲線辺が種々の支持条件をもつ場合について考察した。



図－1

2．基本式の誘導および解析法　図－１に示すように，純曲げを受ける極異方性扇形板がいくつかの帯要素から構成され，各帯要素においては剛度D_r，D_θ，$D_{r\theta}$は一定とする。図－１の斜線を施された任意の帯要素を考え，直線辺の境界条件を満足させるため，変位函数をつぎのように表わす。

$$w=\sum_m \{\zeta\}^t\,[C]\,\{W\}\,\sin m\pi\theta/\alpha$$

ただし，$\{\zeta\}=\{1\ \ \zeta\ \ \zeta^2\ \ \zeta^3\}^t$，

$\{W\}=\{w_i\ \ \theta_i r_o\ \ w_o\ \ \theta_o r_o\}^t$，

$$[C]=\frac{1}{(1-\rho)^3}\begin{bmatrix} 1-3\rho & -\rho(1-\rho) & \rho^2(3-\rho) & -\rho^2(1-\rho)\\ 6\rho & (1-\rho)(1+2\rho) & -6\rho & \rho(1-\rho)(2+\rho)\\ -3(1+\rho) & -(1-\rho)(2+\rho) & 3(1+\rho) & -(1-\rho)(1+2\rho)\\ 2 & 1-\rho & -2 & 1-\rho \end{bmatrix}$$

$\zeta=r/r_o$，$\rho=r_i/r_o$　。

帯要素の曲率と曲げモーメント，ねじりモーメントは，それぞれつぎのように表わされる。

$$\{\chi\}=\{-\partial^2w/\partial r^2\ \ -(\partial w/r\partial r+\partial^2w/r^2\partial\theta^2)\ \ 2(\partial^2w/r\partial r\partial\theta-\partial w/r^2\partial\theta)\}^t=\sum_m 1/r_o^2\cdot[T][B][C]\{W\}$$

$$\{M\}=\begin{Bmatrix}M_r\\ M_\theta\\ M_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}D_r & D_r\nu_\theta & 0\\ D_\theta\nu_r & D_\theta & 0\\ 0 & 0 & D_{r\theta}\end{bmatrix}\{\chi\}=[D]\{\chi\}=\sum_m 1/r_o^2\cdot[D][T][B][C]\{W\}$$

ただし，$[T]$は$\phi\theta$の三角函数，$[B]$はϕとζの函数を要素とする行列で，$\phi=m\pi/\alpha$で

ある。

帯要素のポテンシャル・エネルギーUは，

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\int_{\rho}^{1}\left\{\{M\}^t\{\chi\}-(\pm)\frac{N_0}{r_0^2\eta^2}\left[\xi_0+\frac{(\xi_i-\xi_0)}{1-\rho}(1-\eta)\right]\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right\}r_0^2\eta\,d\eta\,d\theta$$

複号は，$r=r_i$で引張のとき＋，$r=r_0$で引張りのとき－をとる。

上式をθとηに関して積分するとつぎのようになる。

$$U=\frac{D^*\alpha\pi^2}{4(r_0^*-r_i^*)^2}\sum_m\{W\}^t[C]^t\left[\left(\frac{1-\rho}{\pi\beta}\right)^2\delta[H]-k\phi^2[Y]\right][C]\{W\} \tag{1}$$

ただし，D^*は基準の曲げ剛さで，$\delta=D_\theta/D^*$，$\beta=(r_0-r_i)/(r_0^*-r_i^*)$，

$N_0=kD^*\pi^2/(r_0^*-r_i^*)^2$，

$$[H]=\begin{bmatrix}(D_\theta\phi^2+4D_{r\theta})\phi^2(1-\rho^2)/2\rho^2 & & \text{symmetric} & \\ D_\theta(\phi^2-1)\phi^2(1-\rho)/\rho & -D_\theta(\phi^2-1)^2\ln\rho & & \\ -[D_\theta(\phi^2-2)-2D_1-4D_{r\theta}]\phi^2\ln\rho & [D_\theta(\phi^2-2)-2D_1]\cdot(\phi^2-1)(1-\rho) & [4D_r+D_\theta(\phi^2-2)^2-4D_1(\phi^2-2)+4D_{r\theta}\phi^2](1-\rho^2)/2 & \\ [D_\theta(\phi^2-3)-6D_1-8D_{r\theta}]\phi^2(1-\rho) & [D_\theta(\phi^2-3)-6D_1]\cdot(\phi^2-1)(1-\rho^2)/2 & [12D_r+D_\theta(\phi^2-3)(\phi^2-2)-2D_1(4\phi^2-9)+8D_{r\theta}\phi^2](1-\rho^3)/3 & [36D_r+D_\theta(\phi^2-3)^2-12D_1(\phi^2-3)+16D_{r\theta}\phi^2](1-\rho^4)/4\end{bmatrix},$$

$$[Y]=\begin{bmatrix}-\gamma_2\ln\rho-\gamma_1(1-\rho) & & \text{symmetric} & \\ \gamma_2(1-\rho)-\gamma_1(1-\rho^2)/2 & \gamma_2(1-\rho^2)/2-\gamma_1(1-\rho^3)/3 & & \\ \gamma_2(1-\rho^2)/2-\gamma_1(1-\rho^3)/3 & \gamma_2(1-\rho^3)/3-\gamma_1(1-\rho^4)/4 & \gamma_2(1-\rho^4)/4-\gamma_1(1-\rho^5)/5 & \\ \gamma_2(1-\rho^3)/3-\gamma_1(1-\rho^4)/4 & \gamma_2(1-\rho^4)/4-\gamma_1(1-\rho^5)/5 & \gamma_2(1-\rho^5)/5-\gamma_1(1-\rho^6)/6 & \gamma_2(1-\rho^6)/6-\gamma_1(1-\rho^7)/7\end{bmatrix},$$

$\gamma_1=(\xi_i-\xi_0)/(1-\rho)$，$\gamma_2=\xi_0+\gamma_1$，$D_1\equiv D_r\nu_\theta=D_\theta\nu_r$ である。

式(1)を$\{W\}$に関して偏微分すると，つぎのような式が得られる。

$$\partial U/\partial W=\{\partial U/\partial w_i\quad \partial U/r_0\partial\theta_i\quad \partial U/\partial w_0\quad \partial U/r_0\partial\theta_0\}^t$$

ここで，$\dfrac{\partial U}{\partial w_i}=\dfrac{D^*\alpha\pi^2}{2(r_0^*-r_i^*)^2}\sum_m[1\ 0\ 0\ 0][C]^t\left[\left(\dfrac{1-\rho}{\pi\beta}\right)^2\delta[H]-k\phi^2[Y]\right][C]\{W\}$，

$$\frac{\partial U}{r_0\partial\theta_i}=\frac{D^*\alpha\pi^2}{2(r_0^*-r_i^*)^2}\sum_m[0\ 1\ 0\ 0][C]^t\left[\left(\frac{1-\rho}{\pi\beta}\right)^2\delta[H]-k\phi^2[Y]\right][C]\{W\},\qquad \text{etc.}$$

したがって，行列を用いるとつぎのように表わされる。

$$\partial U/\partial W=\left([S]-k[F]\right)\{W\} \tag{2}$$

板全体の全ポテンシャル・エネルギーを最小にする方程式は，各帯要素に対する式(2)の$\{W\}$の同一成分に対応する$[S]$，$[F]$の各要素をそれぞれ加え合わせ，それを板全体の大きさに集合することによって，つぎのように得られる。

$$\left([S^*]-k[F^*]\right)\{W\}=0 \tag{3}$$

式(3)と曲線辺の境界条件を用いて最小固有値kを求めれば，座屈荷重N_0が計算できる。数値計算例は，講演会当日発表する予定である。

1) 米沢・三上・赤松：扇形板の曲げ座屈，土木学会関西支部年次学術講演会概要集，昭44.5，P.I−10

2) 米沢・三上・武田・赤松：扇形板の曲げ座屈(近似解法)，土木学会年次学術講演会講演集第1部，昭44.9，PI−124