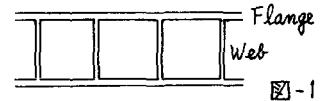


非平面保持の曲げを生ずる多室板構造の解法

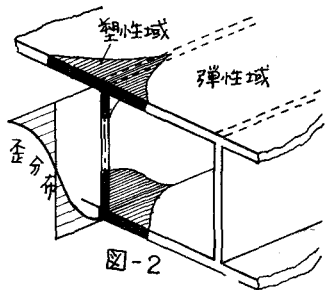
大阪工業大学 正員 岡村宏一

1 序 平板によって構成される薄肉立体構造の3次元弾塑性解析に適用できる1つの解法を提示し、平板構造のうち一般的かつ複雑な形態をもつ多室板構造(図-1)を例に採って説明する。本文で提示する解法の特徴を列挙すれば大要次の通りである。

1) 連立非線形偏微分方程式の解法: この種の構造を構成する面要素はそれら相互の合成によって曲げならびに *Schewe action* の双方を生ずる。しかも要素内に塑性域が生ずればその釣合および適合条件式は連立非線形偏微分方程式となる。従来、このような式を解くには適当な *mesh* を仮定し有限差分式に変換する方法等が用いられている。しかし、面要素で構成される複雑な立体構造の場合は要求される自由度の数は膨大なものになり計算容量、精度の面で発展性に乏しい。本解法ではこのような困難を除去するために1つの新しい手法を用いる。すなわち、塑性化した板内裏を囲む比較的小さい有限領域では上記の諸式中の塑性変形に伴う物理量は平均値を持つものとみなしてこれらの式を線形化する。その結果、解は連続解で得られ、釣合および適合条件式を解くための連立方程式を解く必要はなく解析は著るしく容易になる。解析の途上で塑性化した裏の *plastic tensor* の相互関係を表わす差分表示が用いられるが、これは後に述べる降伏条件式に關連してこれらの近似値を逐次求めるためのものである。



2) 非平面保持の仮定: *local* な部分、特に塑性化する部分では解析上、平面保持の仮定を容認することには疑義がある。本解法では図-2に示すように *Web* に対して厳密な2次元解析を行うことにより非平面保持の歪分布に対応できるようにした。



3) 合成条件: 合成条件は *Flange* と *Web* の合成面で要求される。この部分を完全合成させる手法は既に筆者が若干の立体構造の弾性解析に用いた方法を応用する。合成条件式も非線形であるが、合成面に沿って選定を採りその裏を囲む比較的小さい有限領域で不静定力を平均化する方法が1)の方法と併用される。合成条件式は連立になるが、選定の数は限られ、また解析の途上で *square matrix* は変化しないように操作される。

4) 塑性条件: 弾塑性解析の基本仮定として、構造材料は弾完全塑性体とし、応力-歪条件は *Plandtl-Russ* の方程式に支配されるものとする。曲げと *Schewe Action* の共存する板内の塑性化した裏の降伏条件は実際の *Yield hypersurface* $F(M, N) = \text{Const}$ を2つの *hypersurface* に分離する方法をとる。塑性化した各裏で同時に満足すべき降伏条件式は *Ch. Massonet* の方法を拡張し1)~3)に示した方法と併用することにより線形化する降伏条件式は連立となるが、この種の立体構造では全領域降伏はあまり意味がなく部分的塑性化、あるいは不安定現象への転移等が屢々問題となり裏の数も可成限定されよう。

2 釣合いおよび適合条件式とその解の誘導: 図-3に

示す厚さ h の板の微小エレメントについて、外荷重及び合成面において作用する不静定力として板の上下面に作用する鉛直力、 x, y 各方向の水平せん断力を夫々 $q_0, q_u, S_{0x}, S_{0y}, S_{ux}, S_{uy}$ とし、板のたわみ w 、曲げ剛度 $D = \frac{ER^3}{12(1-\nu^2)}$ 、曲げモーメントおよび軸力の Component を $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$ と表わし、応力関数中、中央面における塑性ポテンシャル f を導入すれば、板の曲げならびに Schriebe Action を支配する基礎式は次のように書かれる。

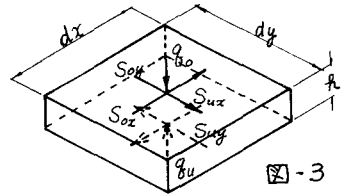


図-3

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{D} \left\{ q_0 - q_u - \frac{R}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (S_{0x} + S_{ux}) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{0y} + S_{uy}) \right] \right\} - \frac{4}{R} \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \mu \left(\frac{\partial f}{\partial m_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_y} \right) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \mu \left(\frac{\partial f}{\partial m_y} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_x} \right) \right\} - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \right\} \right] dt \quad (1)$$

$$\Delta \Delta \phi = \frac{1}{R} \left\{ \nu \left[\frac{\partial}{\partial x} (S_{ux} - S_{0x}) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{uy} - S_{0y}) \right] - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int S_{ux} dx - \int S_{0x} dx \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int S_{uy} dy - \int S_{0y} dy \right) \right\} \right\} - E \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial m_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial m_y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \right) \right] dt \quad (2)$$

式中、時間 t に関する積分項は塑性変形に從属する項であり、塑性ポテンシャル

$$f = m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3 m_{xy}^2 + n_x^2 + n_y^2 - n_x n_y + 3 n_{xy}^2 \quad (3)$$

$$m_x = \frac{M_x}{M_p}, m_y = \frac{M_y}{M_p}, m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_p}, n_x = \frac{N_x}{N_p}, n_y = \frac{N_y}{N_p}, n_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_p}, M_p = \frac{\sigma_p}{4} R^2, N_p = \sigma_p R$$

σ_p : 降伏応力

に關して時間積分を荷重段階の和に置換し次のように書かれる。

$$\int_0^t \psi(x, y) dx = \sum_j \{ \psi(x, y) \}^j, \quad \psi(x, y) = \frac{1}{M_p} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu M) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu M) - 6(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu M_{xy}) \right\} \quad (4)$$

$$\int_0^t \Gamma(x, y) dx = \sum_j \{ \Gamma(x, y) \}^j, \quad \Gamma(x, y) = \frac{1}{N_p} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu N) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu N) - 6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu N_{xy}) \right\} \quad (5)$$

$$M = (2-\nu) M_x - (1-2\nu) M_y, M' = (2-\nu) M_y - (1-2\nu) M_x, N = 2N_x - N_y, N' = 2N_y - N_x$$

ここで j は荷重の Step, μ は plastic tensor a intensity である。次に断面力、および中央面における歪は以下のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{4D}{R M_p} \sum_j (\mu M)^j, & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{4D}{R M_p} \sum_j (\mu M)^j \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{12D}{R M_p} (1-\nu) \sum_j (\mu M_{xy})^j, & N_x &= R \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \int S_{ux} dx - \int S_{0x} dx \\ N_y &= R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \int S_{uy} dy - \int S_{0y} dy, & N_{xy} &= -R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \epsilon_x = \frac{1}{ER} (N_x - \nu N_y) + \frac{1}{N_p} \sum_j (\mu N)^j \\ \epsilon_y &= \frac{1}{ER} (N_y - \nu N_x) + \frac{1}{N_p} \sum_j (\mu N)^j, & \gamma_{xy} &= \frac{2}{ER} (1+\nu) N_{xy} + \frac{6}{N_p} \sum_j (\mu N_{xy})^j \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

非線形基礎式 (1), (2) の解 w, ϕ は前節 1) のらびに 3) で述べた解析的工夫に基づき、図-4, 5 に示すように塑性変形の從属関数 $\psi(x, y), \Gamma(x, y)$ および合成面に作用する不静定力の近似分布を考へて連続関数に与り与えられる。なお、本文では紙面の都合上記述を簡単にすため Web は一方向にのみ配置され、その面外曲げ抵抗を無視し、Flange plate は周辺において歪を生じないように拘束され板厚内での歪勾配を無視する場合を扱った。

Flange plate の解 w, ϕ , 断面力, x 方向歪 ϵ_x は任意点 (u, v) に対し次式で与えられる。

$$w(u, v) = \frac{16a^2}{\pi^6} \left\{ \frac{a^2}{D} \left[q_0 \Omega_0(u, v) + \sum_k \sum_r (P_{0kr} - P_{ukr}) \Omega_{kr}(u, v) - \frac{4}{R M_p} \sum_{i=1}^{i-1} \left\{ \sum_{j=1}^j \psi_{(x, y)}^i + \psi_{(x, y)}^j \right\} \Omega_i(u, v) \right] \right\} \quad (7)$$

$$\phi(u,v) = \frac{16a^2}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi a}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (t_{uer} - t_{orer}) \left\{ \lambda^2 \Lambda_{kr}(u,v) - \nu \Lambda_{kr}(u,v) \right\} \right. \\ \left. - \frac{E}{N_p} \sum_{i=1}^{i-1} \left\{ \bar{F}_{(x,y_i)}^k + \bar{F}_{(x,y_i)}^j \right\} \Omega_i(u,v) \right\} \quad \text{---(8)}$$

式中、 Ω, Λ, λ は任意点の座標および前述の有限小領域の大きさに関連して単独に求まる級数和で

$$\Omega_0(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{\sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0}{m n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \alpha_m C_0 \sin \beta_n d_0 \sin \alpha_m u \sin \beta_n v \\ \Omega_{ker}(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{\sin \alpha_m x_r \sin \beta_n y_k}{m n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \alpha_m C_r \sin \beta_n d_k \sin \alpha_m u \sin \beta_n v \\ \Omega_i(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{\sin \alpha_m x_i \sin \beta_n y_i}{m n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2b} \sin \frac{n\pi}{2s} \sin \alpha_m u \sin \beta_n v \\ \Lambda_{ker}(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{\cos \alpha_m x_r \sin \beta_n y_k}{m n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \alpha_m C_r \sin \beta_n d_k \sin \alpha_m u \sin \beta_n v$$

$$\Lambda'_{ker}(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{m \cos \alpha_m x_r \sin \beta_n y_k}{m^2 (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \alpha_m C_r \sin \beta_n d_k \sin \alpha_m u \sin \beta_n v$$

ただし $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b, \lambda = a/b$ これらの級数は総和公式を用いて単級数に変換して4項値を求める。

(7), (8) を (6) に代入して断面力を求める。

$$M_x(u,v) = \frac{16a^2}{\pi^4} \left\{ g_0 w_0(u,v) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (P_{orer} - P_{uer}) w_{ker}(u,v) \right. \\ \left. - \frac{64D}{\pi^4 R M_p} \left[\sum_{k=1}^{i-1} \left\{ \sum_{l=1}^l \bar{\psi}_{(x,y_i)}^k w_l(u,v) + \frac{\pi^4}{16} (\mu M)_{(u,v)}^k \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{l=1}^j \bar{\psi}_{(x,y_i)}^j w_l(u,v) + \frac{\pi^4}{16} (\mu M)_{(u,v)}^j \right] \right\} \quad \text{---(9)}$$

$$N_x(u,v) = -\frac{16a}{\pi^3} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (t_{uer} - t_{orer}) \left\{ P_{ker}(u,v) \lambda^2 - \nu P_{ker}(u,v) - R_{ker}(u,v) \right\} \right. \\ \left. - \frac{Eh}{a \pi N_p} \sum_{i=1}^{i-1} \left\{ \bar{F}_{(x,y_i)}^k + \bar{F}_{(x,y_i)}^j \right\} \xi_i(u,v) \right] \quad \text{---(10)}$$

同様に M_y, M_{xy}, N_y, N_{xy} 等も求まるが紙面の都合で省略する。

w, ψ, ξ, R は前述の Ω, Λ, λ と同様単独に求まる級数和である。

又頂板の場合 $P_{orer}, t_{orer} = 0$, 底板の場合 $P_{uer}, t_{uer} = 0$ である。

(7) ~ (10) の各式に含まれる $\bar{\psi}_{(x,y_i)}, \bar{F}_{(x,y_i)}$ は (4), (5) より型性化した i 点および周囲の8点の断面力の近似値を与えれば、図-6のネットを用いて各点の μ の代数関数として次のように近似的に与えられる。

$$\bar{\psi}_{(x,y_i)} = l^2 \{ \mu_{i(0)} M_{i(0)} + \mu_{i(1)} M_{i(1)} \} + (\lambda s)^2 \{ \mu_{i(0)} M'_{i(0)} + \mu_{i(1)} M'_{i(1)} \} \\ - 2 \mu_{i(0)} \{ l^2 M_{i(0)} + (\lambda s)^2 M'_{i(0)} \} - 6(1-\nu) \lambda \lambda s \{ \mu_{i(1,2)} (M_{xy})_{i(1,2)} \\ - \mu_{i(1,2)} (M_{xy})_{i(1,2)} - \mu_{i(1,2)} (M_{xy})_{i(1,2)} + \mu_{i(1,2)} (M_{xy})_{i(1,2)} \} \quad \text{---(11)}$$

$\bar{F}_{(x,y_i)}$ も同様に求まる。一方 x 方向の変位 ε_x は再び (6) 式から次式のように得られる。

$$\varepsilon_x(u,v) = -\frac{16a}{\pi^3 E h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} (t_{uer} - t_{orer}) \left\{ \lambda^2 E_{ker}(u,v) - \nu F_{ker}(u,v) - R_{ker}(u,v) \right\} + \frac{16}{\pi^4 N_p} \left[\sum_{k=1}^{i-1} \left\{ \sum_{l=1}^l \bar{F}_{(x,y_i)}^k I_l(u,v) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi^4}{16} (\mu N)_{(u,v)}^k \right\} + \sum_{l=1}^j \bar{F}_{(x,y_i)}^j I_l(u,v) + \frac{\pi^4}{16} (\mu N)_{(u,v)}^j \right]$$

式中 E, F, I も前例同様単独に求まる級数和である。

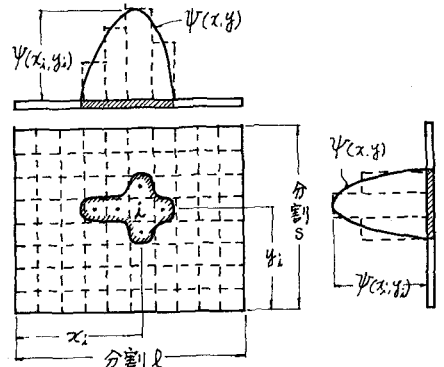


図-4 型性域と型性変形関数 $\psi(x,y)$ の近似 ($\bar{F}(x,y)$ も同様に近似される。)

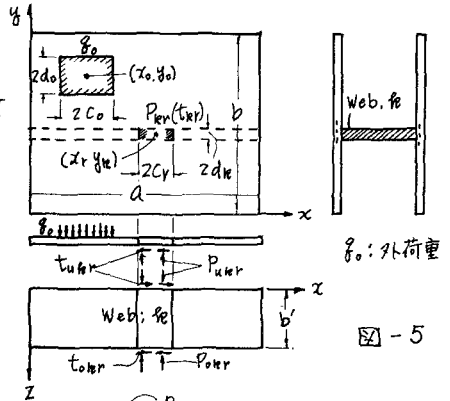


図-5

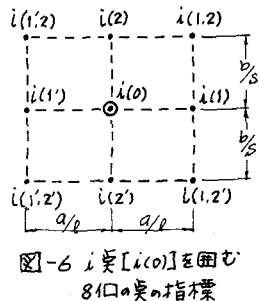
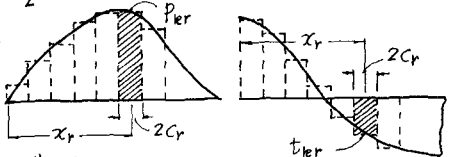


図-6 i 点 $[i(0)]$ を囲む8点の指標

Web plate の解 ϕ_k は任意点 (x, z) に対し、次のように与えられる。

$$\phi_k(x, z) = -\frac{16a^2}{\pi^2 N_p} \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\{ \bar{\Gamma}_{(x, z_i)}^{\kappa} + \bar{\Gamma}_{(x, z_i)}^{\downarrow} \right\} \Omega_{\ell}(x, z) + \frac{1}{R} \sum_m X_m(z) \sin \alpha_m x \quad \text{----- (13)}$$

式中、 $X_m(z) = A_m \sinh \alpha_m z + B_m \cosh \alpha_m z + C_m \alpha_m z \sinh \alpha_m z + D_m \alpha_m z \cosh \alpha_m z$ ----- (13')

積分定数 $A_m \sim D_m$ は Web の境界における不静定力分布に関する次の条件より定まる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{z=0} &= \frac{4}{\pi} \sum_r P_{ker} \sum_m \frac{1}{m} \sin \alpha_m x_r \sin \alpha_m C_r \sin \alpha_m x, \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{z=b} = \frac{4}{\pi} \sum_r P_{ker} \sum_m \frac{1}{m} \sin \alpha_m x_r \sin \alpha_m C_r \sin \alpha_m x \\ - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)_{z=0} &= \frac{4}{\pi} \sum_r t_{ker} \sum_m \frac{1}{m} \cos \alpha_m x_r \sin \alpha_m C_r \cos \alpha_m x, \quad - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)_{z=b} = \frac{4}{\pi} \sum_r t_{ker} \sum_m \frac{1}{m} \cos \alpha_m x_r \sin \alpha_m C_r \cos \alpha_m x \end{aligned} \quad (14)$$

以上により ϕ_k を定め Flange plate の場合と同様に断面力および $z=0$, $z=b$ 各辺の選定 $(x_r, z=0)$, $(x_r, z=b)$ の x 方向歪 $\varepsilon_{kx}(x_r, z=0)$, $\varepsilon_{kx}(x_r, z=b)$, z 方向変位 $v_{kz}(x_r, z=0)$, $v_{kz}(x_r, z=b)$ が求まるが詳細は紙面の都合で割愛する。

3 合成条件式: 合成条件式は合成面上に採った選定において Flange plate と Web plate の歪を適合させて求められる。例えば Web plate との合成面上の選定 (x_r, y_R) における頂板および底板の k のみ、歪をそれぞれ $w(x_r, y_R)$, $\bar{w}(x_r, y_R)$, $\varepsilon_x(x_r, y_R)$, $\bar{\varepsilon}_x(x_r, y_R)$ とすれば、

$w(x_r, y_R) = v_{kz}(x_r, z=0)$, $\bar{w}(x_r, y_R) = v_{kz}(x_r, z=b)$, $\varepsilon_x(x_r, y_R) = \varepsilon_{kx}(x_r, z=0)$, $\bar{\varepsilon}_x(x_r, y_R) = \varepsilon_{kx}(x_r, z=b)$ (15)
合成条件式により不静定力 P_{ker} , P_{ker} , t_{ker} , t_{ker} 等は、いずれも作用荷重 q 、ならびに Flange, Web の塑性変形に伴う諸量 ψ , T , μM , μN 等の関数として表示されることになる。

4 降伏条件式ならびに逐次計算の方法: Flange あるいは Web の塑性化した点 i の降伏条件は (3) により $f_i = 1$ ----- (16)

$f < 1$ なる場合は弾性至路上にあり、この時点 z は $\mu = 0$ である。構造全域が弾性状態の場合の計算には特に問題はない。弾塑性状態の場合の逐次計算は次のようにして行なう。今、荷重段階 $j-1$ から j に移行する時点を考えよう。 $j-1$ 段階におけるすべての諸量は確定したものとす。先づ荷重を j 段階の q_j に増加させ ψ , T , μM , μN 等の塑性項を $j-1$ 段階に止め (9), (10) 等の断面力 α 式および合成条件式により j 段階での M , N の第1近似値 $M^{j,1}$, $N^{j,1}$ を求める。次にこれ等を (3) 式に代入して各点 α の $f^{j,1}$ を計算し、幾つかの点で $f^{j,1} > 1$ になったとす。これらの塑性化した各点で $f = 1$ になるような $\mu^{j,1}$ を次のように求める。再び (9), (10), 合成条件式等を用いて j 段階の塑性項のみによる断面力の変化 ΔM , ΔN を表わすことができる。一方、前述の $M^{j,1}$, $N^{j,1}$ を用い (11) 等より j 段階の塑性項の第1近似値 $\psi^{j,1}$, $T^{j,1}$, $(\mu M)^{j,1}$, $(\mu N)^{j,1}$ が intensity $\mu^{j,1}$ の代数式として得られる。結局、 $\Delta M^{j,1}$, $\Delta N^{j,1}$ が $\mu^{j,1}$ の代数関数で求まる。次に $M^{j,1}$, $N^{j,1}$ の変化量 $\Delta M^{j,1}$, $\Delta N^{j,1}$ により塑性化ポテンシャルが $\Delta f^{j,1}$ だけ変化しただけとすると塑性域にある各点で、 $f^{j,1} + \Delta f^{j,1} = 1$ とおければならない。 $\Delta M^{j,1}$, $\Delta N^{j,1}$ の2次の項を無視して降伏条件式を線形化すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_p^2} \{ M_x^{j,1} (2\Delta M_x^{j,1} - \Delta M_y^{j,1}) + M_y^{j,1} (2\Delta M_y^{j,1} - \Delta M_x^{j,1}) + 6M_{xy}^{j,1} (\Delta M_{xy}^{j,1}) \} + \frac{1}{N_p^2} \{ N_x^{j,1} (2\Delta N_x^{j,1} - \Delta N_y^{j,1}) \\ + N_y^{j,1} (2\Delta N_y^{j,1} - \Delta N_x^{j,1}) + 6N_{xy}^{j,1} (\Delta N_{xy}^{j,1}) \} = f_{j,1} - 1 \quad \text{----- (17)} \end{aligned}$$

(17) は塑性域にある各点で要求され、これらの点の $\mu^{j,1}$ に関する連立一次方程式である。再び塑性項を修正して得られる $M^{j,2}$, $N^{j,2}$ が (16) に対し収束する迄繰返し計算を行なう。

1) Ch. Massonet: General Theory of Elasto-Plastic Membrane Plates; Eng. Plasticity, 1968