骨組構造物の最小重量設計

京都大学工学部土木工学科　正会員　山田善一
新日本技術コンサルタント　正会員　○岡田鉄三

1．緒言

工学における設計という作業は，作られる対象物が，その使用目的に対して合理的かつ最適となるべく実行されなければならない。土木工学では，構造力学，水理学，土質工学などいわゆる工学基礎科学(Engineering Science)が，その対象物の設計過程にとり入れられ外力に対する応力，変形や，必要寸法が決定されて来たが，実際に設計された構造物や施設が，果して最も適した寸法に作られているか否かなどについての設計結果の判断や，最適設計結果に到達する手法に関しては，多分に経験的な勘に頼っている場合が多い。このような工学における最も重要な作業である設計，特に構造物の設計において設計理論の根拠を与えるのが，構造総合(Structural Synthesis)の考え方であるといえよう。すなわち，与えられた制約条件のもとで設計対象の効果を最大にするためには，どのような数学モデルのもとで問題を処理すればよいかを設計の一貫したシステムの中でとらえてゆこうとするもので，特に米国を中心としてここ数年，構造工学の主要な研究テーマとして取りあげられている。この研究も Structural Synthesis に属するもので，著者らは，弾性設計による骨組構造物の最小重量設計法についての一つの計算法を以下に提案する。なおこれに類する最小重量設計法についていくつかの論文がASCE, AIAAなどに発表されているが，いずれも汎用性に欠けるため実用化の点で問題がある。著者らは，これらの研究を踏えつつより汎用性，実用性のある設計法の開発ということに重点をおいた。

2．設計法の原理

まず設計変数を$X(x_1, \cdots, x_n)$とし，目的関数は，次式で表わす。

$$F \equiv F(X) \qquad \text{(2.1)}$$

これは，一般に数式で表わされる。一方設計変数Xに対する構造物の応答は，

$$B_i \equiv B_i(X) \qquad (i=1 \cdots\cdots m) \qquad \text{(2.2)}$$

とする。一般にこのB_iは，Xの値が与えられると，電子計算機による数値解析によって決定される。一方制約条件式は応答B_iおよび変数Xを含む関数を用いて次のように表わす。

$$f_p(B_i, X) \leq a_p \qquad (p=1 \cdots l,\ i=1 \cdots r,\ r \leq m) \qquad \text{(2.3)}$$

たとえば，Von-Mises, Tresca 等の降伏条件式がこの式に相当する。次に初期仮定値X^0からΔXだけ修正することを考える。すなわち$X = X^0 + \Delta X$とする。この場合目的関数，応答，制約条件は，次のようになる。

$$F = F(X^0 + \Delta X) = F^0 + \Delta F \qquad \text{(2.4)}$$

$$B_i = B_i(X^0 + \Delta X) = B_i^0 + \Delta B_i \qquad \text{(2.5)}$$

$$f_p(B_i, X) = f_p(B_i^0 + \Delta B_i, X^0 + \Delta X) \leq a_p \qquad \text{(2.6)}$$

ところでこの三式は，X^0があらかじめ与えられるとすると未知の修正値ΔXの関数と考えられる。したがって最適な修正値ΔX_{opt}を決定するためには，ΔXを変数とする制約条件式(2.6)

のもとで目的関数(2·5)式を最小ならしめる ΔX の値を決定すればよい。このように X^0 の近傍での最適修正値が決定されれば次の段階で $(X^0+\Delta X_{sol})$ を初期仮定値 X^0 として同じ計算を行なう。以下同様の操作を F の値が収束するまで繰返せば，最適設計が得られることになる。

3. Non-Linear Programming (SUMT法[1])

設計問題が，以上のように条件付き最小値問題という数学モデルに変換されると次ないかにこの最適修正値を決定するかということになるが，一般に(2·6)式は，ΔX に対して非線型になるので，この問題は，Non-Linear Programming として取り扱わなければならない。ここでは，Non-Linear Programming として，制約条件(2·6)式で作られる Feasible Region が凹であっても適用できる SUMT 法を用いる。以下簡単にこの手法を説明する。いま，制約条件 $f_i(X)\geq 0$ のもとで目的関数 $F(X)$ を最小にする問題を考える場合次のような Un-Constrained Minimization Problem に変換する。

$$P(X, r_k) = F(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{f_i(X)} \quad \text{------------------} (3\cdot 1)$$

まず $k=1$ に対して r_1，S_i の値および X の初期値を与えて $W^0=\{X/f_i(X)>0\}$ 内で P を最小にする X_1 を Un-Constrained Minimization Technique により決定する。次に r_2 を $r_1>r_2>0$ なるように与えて，X_1 を初期値として同じく P を最小にする X_2 を決定する。以下同じ操作を繰返して $\lim_{k\to\infty} r_k=0$ とするとき，$\min_{r_k\to 0} P(X, r_k)$ は $\min F(X)$ に一致するようになる。以上のように制約条件付き最小値問題を Un-Constraint Minimization Technique を繰返し用いる問題に変換することにより最適解を得ることができる。

4. 最適設計計算に用いる計算手法

応答 B_i を決定する応答解析すなわち構造解析には，Stiffness Matrix Method を用いる。次に ΔX に対する B_i の増分 ΔB_i は，X^0 のまわりに Taylor 展開して2次項以下を無視して得られる次式より計算する。

$$\Delta B_i = \left[\frac{\partial B_i}{\partial X}\right]_{X=X^0} \cdot \Delta X = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial X_j} \cdot \Delta X_j \quad \text{--------------} (4\cdot 1)$$

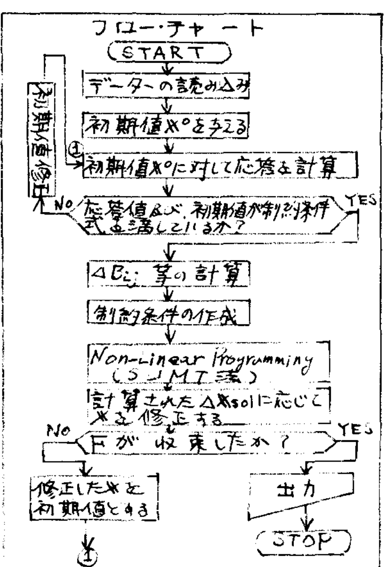
なお $\partial B_i/\partial X_j$ は，X_j^0 のみを2倍したときの B_i の増分 ΔB_{ij} を X_j^0 で割ったものに近似せうるので結局次式より ΔB_i が求まる。

$$\Delta B_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta B_{ij} \cdot \Delta X_j / X_j^0 \quad \text{----} (4\cdot 2)$$

Un-Constrained Minimization Technique については，色々な手法[2]があるが，このような問題については，Direct Search Method[2]が一番有利であるのでこれを用いる。

5. フローチャートおよび適用例

この設計法をプログラム化する場合のフローチャートを右に示す。著者らは，これを FORTRAN IV によりプログラミングし Built-up Section をもつラーメンに適用してみた。その結果および詳細については，講演時に述べる。



参考文献

(1) J. Kowalik "Non-Linear Programming Procedures and Design Optimization"
(2) 〃 "Method for Un-Constrained Optimization Problems"
(Published by American Elsevier Pub. Co.)