ネットワークトポロジー的性質を用いた骨組構造物の弾塑性解析

京都大学　正　工博　小西一郎
京都大学　正　工博　白石成人
正　工修　玉村三郎
学　工修○谷口健男

1．まえがき

骨組構造物解析法において、骨組のもつトポロジー的性質に注目する解析法がある。[1] この性質は構造物内の各部枝間の接合関係が保たれているかぎり不変であって、構造物が全体として弾性的挙動を(しているかぎり)利用できるものである。[2] 従来、この方法は主として弾性解析に適用されており、弾塑性解析への適用例としては小西、白石、玉村の研究[3]だけである。しかし、この例においては、塑性ヒンジが発生するに従って、構造物の剛性マトリクスが大きくなり、結果として計算回数、計算時間の増加という欠点をもっている。本研究においては、部枝端に発生した塑性ヒンジの影響をその部枝の剛性行列の変形によって解決することにより、上記の欠点をなくした。また、この方法を用いるとき、荷重増加により塑性ヒンジの発生した部枝の剛性だけが変化し、弾性状態にある部枝の剛性は変化しない。この点に注目して、構造物の Flexibility matrix を求めた。

2．前提条件

1)集中荷重を取り扱い、分布荷重は等価な集中荷重に置換する。2)比例載荷。3)完全弾塑性体。4)崩壊に至るまで不安定現象は生じない。5)全断面降伏の予想される点をあらかじめ節点に選ぶ。6)降伏関節における変形は塑性成分のみを考りょする。

3、基礎式の誘導[2),4)]

・塑性ヒンジによる剛性マトリクスの修正；構造物の全ての部枝は、各々その方向を定められており、よって塑性ヒンジの位置は始端，終端，あるいは両端に位置する。今ｉ部枝の弾性時の剛性をK_{ii}とすれば、K_{ii}は上記の各場合について、それぞれつぎのように修正される。図１の塑性ヒンジ（微小巾）の両端の変位増分量を各々、δD_j, $\delta D_{j'}$とすると、塑性ヒンジの影響によりこの点で不連続となる。この不連続量をδD_j^pとすると、

$$\delta D_j^p = \delta D_j - \delta D_{j'} \qquad (1)$$

ｉ部枝の変形増分量をδu_iとし、その弾性変形増分量をδu_i^eとすると、荷重増分δR_jとδu_i^eとの間に、次式が成りたつ。

$$\delta R_j = K_{ii}\cdot\delta u_i^e = K_{ii}(\delta u_i - \delta D_j^p) \qquad (2)$$

一方、塑性ヒンジによるK_{ii}の修正項をΔK_{ii}とすると、ｉ部枝のみかけの荷重－変形関係は

$$\delta R_j = (K_{ii} - \Delta K_{ii})\cdot\delta u_i = K_{ii}^{*}\cdot\delta u_i \qquad (3)$$

(2), (3)両式を対比させることにより、

$$K_{ii}\cdot\delta D_j^p = \Delta K_{ii}\cdot\delta u_i \qquad (4)$$

図1. 始端に塑性ヒンジ

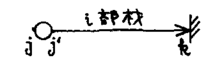
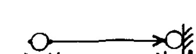


図2. 終端に塑性ヒンジ

図3. 両端に塑性ヒンジ



降伏関数を f とすると，$\delta f = \frac{\partial f}{\partial R_j}\delta R_j = \Phi_j^t \delta R_j = 0$，また塑性流れの法則より，$\delta D_j^p = \lambda_j \Phi_j$，（ここで λ_j は正の任意係数であり，sufix t は転置を意味する。）この両式を(4)式に代入すると，

$$\Delta K_{ii} = \frac{K_{ii}\Phi_j \Phi_j^t K_{ii}}{\Phi_j^t K_{ii} \Phi_j} \tag{5}$$

終端および両端に塑性ヒンジのある場合（図2，3）も同様にして

$$\Delta K_{ii} = \frac{K_{ii} T_{kj}^t \Phi_k \Phi_k^t T_{kj} K_{ii}}{\Phi_k^t T_{kj} K_{ii} T_{kj}^t \Phi_k} \quad ;\text{終端に塑性ヒンジ} \tag{6}$$

$$\Delta K_{ii} = \frac{B_{11}'^t(A_{22}B_{11}' - A_{12}B_{22}') + B_{22}'^t(A_{11}B_{22}' - A_{21}B_{11}')}{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}} \quad ;\text{両端に塑性ヒンジ} \tag{7}$$

ここで T_{kj}；j から k への変換行列

$A_{11} = \Phi_j^t K_{ii} \Phi_j$, $A_{12} = \Phi_j^t K_{ii} T_{kj}^t \Phi_k$, $A_{21} = A_{12}^t$, $A_{22} = \Phi_k^t T_{kj} K_{ii} T_{kj}^t \Phi_k$, $B_{11} = \Phi_j^t K_{ii} \delta u_i$,
$B_{22} = \Phi_k^t T_{kj} K_{ii} \delta u_i$, $B_{11}' = \Phi_j^t K_{ii}$, $B_{22}' = \Phi_k^t T_{kj} K_{ii}$

○トポロジー的性質を用いた基礎式；構造物の部材と節点との接合関係を示すIncidence matrixを A，各部材のstiffness matrixを対角に並べた剛性行列を K，節点変位増分と節点荷重増分を各々 $\delta u'$, $\delta P'$ とすると

$$\delta u' = (A^t K A)^{-1} \delta P' = \left[K^{(0)}\right]^{-1} \delta P' = F^{(0)} \delta P' \tag{8}$$

ある荷重段階において，i 部材に塑性ヒンジが発生したとすると，K のうちのその部材の剛性 K_{ii} を K_{ii}^* でおきかえる。この修正された構造物全体の剛性を K^* とすると

$$\delta u' = (A^t K^* A)^{-1} \delta P' \tag{9}$$

○Flexibility Matrix；$\delta P'$ の増加によって塑性ヒンジの生じている部材の剛性だけが変化するにすぎないから，$(A^t K^* A)$ の逆行列を直接求めることはムダが多い。i 部材に塑性ヒンジが発生しているとする。ΔK を K と同じ大きさの行列とし，その（i，i）要素に ΔK_{ii} が入っており，それ以外の要素は全て0とする。また A の i 部材に関する行ベクトルを A_i で表わす。そうすると

$$K^{(1)} = A^t K^* A = A^t(K - \Delta K^{(1)})A = A^t K A - A^t \Delta K^{(1)} A = K^{(0)} - A_i^t \Delta K_{ii}^{(1)} A_i \tag{10}$$

(10)式にHousholderの式を適用すると，$K^{(1)}$ の逆行列 $F^{(1)}$ は $F^{(0)}$, $\Delta K_{ii}^{(1)}$ を用いて表わされる。

$$F^{(1)} = \left[K^{(1)}\right]^{-1} = \left[K^{(0)} - A_i^t \Delta K_{ii}^{(1)} A_i\right]^{-1} = F^{(0)} + F^{(0)} A_i^t \left(\Delta K_{ii}^{(1)-1} - A_i F^{(0)} A_i^t\right)^{-1} A_i F^{(0)} \tag{11}$$

これをつづけると一般に第 n 回目のflexibility matrix $F^{(n)}$ は $F^{(n-1)}$ を用いて次式のように表わされることになる。

$$F^{(n)} = \left[K^{(n)}\right]^{-1} = F^{(n-1)} + F^{(n-1)} A_i^t \left(\Delta K_{ii}^{(n)-1} - A_i F^{(n-1)} A_i^t\right)^{-1} A_i F^{(n-1)} \tag{12}$$

4．あとがき

本研究において，まず塑性ヒンジの影響を含めた修正部材剛性を求め，ネットワークトポロジー的性質を用いた弾性解析法の弾塑性解析への応用をはかった。つぎに，Housholder の公式を連続的に適用することにより，前荷重段階のflexibility matrixを修正する形で新しい荷重段階のflexibility matrixを求める式を導びいた。これにより，計算時間の大幅な減少が期待される。

参考文献；
1) Fenves and Branin；"Network-Topological Formulation of Structural Analysis" Proc. ASCE. ST. 1963
2) Taniguchi "A Network-Topological Study on Statical Analysis of Framed Structures" Thesis of Master, Kyoto Univ. 1970
3) 小西，白石，玉村 "立体骨組の弾塑性解析" 関西土木学会講演概要，1969.
4) 上田，赤松，近江 "マトリクス法による骨組構造物の弾塑性解析" 日本造船学会論文集 第124，126