軸力の影響を考慮した骨組の弾塑性解析について

京都大学 工学部 正員 丹羽義次
京都大学 工学部 正員 小林昭一
日建設計工務 正員 ○伊藤智造

1. はじめに

塑性ヒンジを用いた塑性設計法では部材に生じる軸力については、まったく考慮されておらず、軸力が大きく作用する構造物においては、軸力による影響、すなわち、全塑性モーメントの低下、座屈等の安定性の問題が生じてくるであろう。そこで、以上の問題を含めて、軸力の影響を考慮した解析を試みた。ただし構造の材料は完全弾塑性とする。

2. 塑性剛性マトリクス

曲げモーメントと軸力を同時に受けて、全断面塑性化した部材の応力分布は図−1に示すものとすると、そのときの塑性域は図−2aに示す放物線で囲まれた領域となる。この塑性域を図−2bに示すように直線で囲まれた部分で近似する。その直線を、

$$y = a(x+e) \qquad (1)$$

とすると、塑性流動理論より、軸方向塑性ひずみ ε^P は

$$d\varepsilon^P = \lambda \qquad (2)$$

これより、塑性軸方向変形 u_N^P は

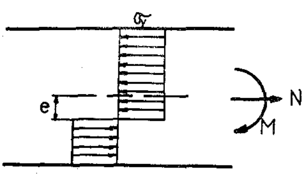
$$du_N^P = ea\lambda \qquad (3)$$

また、塑性回転変形 u_M^P は

$$du_M^P = a\lambda \qquad (4)$$

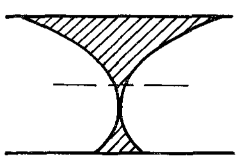
すると、微小塑性変形ベクトル $\{du^P\}$ は

$$\{du^P\} = \begin{Bmatrix} du_N^P \\ 0 \\ du_M^P \end{Bmatrix} = a\lambda \begin{Bmatrix} e \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \Lambda \begin{Bmatrix} e \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \Lambda\{\eta\} \qquad (5)$$

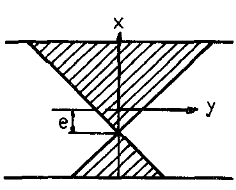


図−1

図−2a



図−2b



部材両端に対して

$$\{du^P\} = \begin{Bmatrix} du_i^P \\ du_j^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\eta_i\} & 0 \\ 0 & \{\eta_j\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_i \\ \Lambda_j \end{Bmatrix} = [\eta]\{\Lambda\} \qquad (6)$$

(6)式において弾性端に対しては $\Lambda = 0$ とすればよい。

一方、降伏関数をF（矩形断面においては $F = \left|\frac{M}{M_P}\right| + \left(\frac{N}{N_P}\right)^2 - 1 = 0$）とするならば、塑性条件として

$$dF = 0 = \sum_k \frac{\partial F}{\partial P_k} dP_k = \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial N} & \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial M} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dN \\ dS \\ dM \end{Bmatrix} = \{\xi\}^T\{dP\} \qquad (7)$$

ただし、N：軸力、S：せん断力、M：モーメント

部材両端に対して

$$\begin{bmatrix} \{\xi_i\}^T & 0 \\ 0 & \{\xi_j\}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{dP_i\} \\ \{dP_j\} \end{Bmatrix} = [\xi]\{dP\} = 0 \qquad (8)$$

また、変形、部材力関の関係は

$$\{dP\} = [K]\{du^e\} = [K]\{du\} - [K]\{du^P\} \qquad (9)$$

(6)、(8)、(9)式より

$$\{\Lambda\} = \left[[\xi]^T[K][\eta]\right]^{-1}[\xi]^T[K]\{du\} \qquad (10)$$

(6)、(10)式より

$$\{du^P\} = [\eta]\left[[\xi]^T[K][\eta]\right]^{-1}[\xi]^T[K]\{du\} \qquad (11)$$

(9)、(11)式より

$$\{du\} = [K]\left[[I] - [\eta]\left[[\xi]^T[K][\eta]\right]^{-1}[\xi][K]\right]\{du\}$$

$$= [K^P]\{du\} \qquad [I]：単位マトリクス \qquad (12)$$

ここで塑性状態における剛性マトリクス $[K^P]$ が得られ、これより構造系の剛性マトリクスを求めて解析を行なえばよい。

3．安定性の問題

通常は無視されてあつかわれているが、ここで、たわみによる軸力の仕事を導入することによって、安定性を考慮する。たわみによる軸力の仕事は、

$$W_N = -\int_l N\varepsilon\, dx \qquad (13)$$

ただし　N：圧縮軸力、ε：軸方向ひずみ、l：部材長

すると

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2} - dx}{dx} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad (14)$$

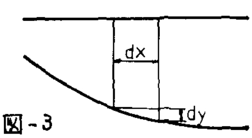


図-3

Nは部材において一定であるとすると

$$W_N = -\frac{N}{2}\int_l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \qquad (15)$$

たわみを部材端変位で表わすと

$$y = y(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \qquad (16)$$

図-4

Castigliano の定理によって

$$P_i^N = \frac{\partial W_N}{\partial u_i} = \sum_k K_{ik}^N u_k \qquad (17)$$

とすると K^N は軸力の影響による剛性を表わすから、通常の剛性マトリクスに加えることによって軸力の影響を考慮した剛性マトリクスが得られる。外力と変位の関係は $\{P\}=[K]\{u\}$ で与えられるので、不安定状態は $[K]^{-1}=0$、すなわち $|[K]|=0$ で定義される。これを満足する軸力を見つけ、その時の荷重が安定極限荷重である。

4．解析

(16)式は通常、超越関数となり、(17)式を満足する形にならないので、ここで、(16)式はその軸力の影響を無視した式を用い、そのために部材を分割することによって近似した。　剛性マトリクスは軸力の関数であり、外力と変形の関係 $\{P\}=[K]\{u\}$ は非線形になる。これを線形化して弾塑性の問題と安定性の問題とを同時に考慮して、逐次解析を行なった。