# 高速道路網における緊急時う回ルート探索に関する一考察

京都大学工学部　正員　米谷栄二
京都大学工学部　正員　明神　証
大阪府　正員　○小河保之

1.まえがき　高速道路を利用する車は一般に出来るだけ短時間に目的地に到達しようとする。だからランプ間ＯＤ交通量が与えられた時、各ＯＤについて最短経路を与えれば、最短経路行列を用いて区間交通量を表わすことが出来る。同一ＯＤについて少くとも2本の経路があるネットにおいて、ある区間が事故のため完全に閉塞された時には、う回ルートがあれば、そのう回ルートを探し、その時の経路行列を求めることによって流入車の制御が可能となる。ところが、ある区間が閉塞された時の経路行列も電子計算機に記憶させておくことは、ネットが複雑になれば経済的でない。それゆえ電子計算機によって迅速にう回ルートを探索し、経路行列を求めることが出来れば、電子計算機の経済的利用という面から価値があり、緊急制御にあたり必要となってくる。そこでう回ルートを探索するあるネットにおいて、各ノード間の最短距離とリンクの長さとIncidence matrixから、各ノードを出発点とした時の他のノードまでの最短経路を表わしたTreeをmatrixの形で求める方法について述べる。

2. matrixによる最短距離のTree探索法　ここで最短距離のTreeとは、1つのノードを出発点とし、他のすべてのノードへ最短距離で行く時に通過すべきリンクのみに着眼したとき、このリンクとノードからなるTreeのことである。なお高速道路では、ノードがランプに、リンクが区間に相当する。最短経路は、各ノード間の最短距離、リンクの長さ、リンクとノードの結びつき方(Incidence matrix)が与えられれば、決定出来る。

2-1　最短距離行列

各ノード間の最短距離を距離行列から、新しい演算によって求める。いまmatrixの演算定義を次のようにする。

演算定義1

$A=[a_{ij}]$ (m行k列)　$B=[b_{ij}]$ (k行n列)

$A \otimes B = C = [c_{ij}]$　ただし　$c_{ij}=\min_{1\leq l\leq k}(a_{il}+b_{lj})$

すなわち、matrixの演算において通常もちいられている意味の積和のかわりに、それぞれ和最小値をとることである。次に距離行列$L^{(1)}$を定義する。

$L^{(1)}=[l_{ij}^{(1)}]$　( $l_{ij}^{(1)}$；ノードiからノードj方向にリンクがあれば、その長さとし、ノードiとノードjが結ばれていない時は∞とし、i=jの時には0とする。)

このmatrix $L^{(1)}$に演算定義を適用して、$L^{(1)}\otimes L^{(1)}=L^{(2)}$, $L^{(2)}\otimes L^{(1)}=L^{(3)}$, …… なる演算を施し、次のmatrix $L^{(n)}$をつくる。

$L^{(n)}=[l_{ij}^{(n)}]$

この時matrix $L^{(n)}$の要素$l_{ij}^{(n)}$はノード$n_i$からノード$n_j$へn辺以内のリンクを経て行く時の最短距離を表わしており、有限の大きさのネットについては、nを大きくとると$L^{(n)}=L^{(n+1)}$となることが示されている。この時$L^{(n)}=L$とするとmatrix Lの要素$l_{ij}$はノードi,j間の最短ルートの距離を表わしている。このLを最短距離行列と呼ぶことにする。

## 2-2　最短距離のTree

Incidence matrix とリンクの長さから求める行列 $A'$ と最短距離行列より，最短経路が，どの様なリンクの結びつき方であるかを1つのノードを出発点とした時のTreeとして行列の形で求めてみる。matrix $A'$ は，リンクの長さを表わした行ベクトル $\mathbb{L}=(l_1,l_2,\cdots,l_m)$ とIncidence matrix $A$ とによって次式より求められるものである。

$$A'=A\times dig(l_1,l_2,\cdots l_m)$$

すなわち，Incidence matrixの1と−1において，符号はそのままにしておき，1のかわりに，リンクの長さを入れたものである。次に最短距離のTreeを求める演算を定義する。

演算定義2

$$L={}_{i}^{n}[\overset{\text{ノード}}{l_{ij}}]\qquad A'={}_{i}^{n}[\overset{\text{リンク}}{a'_{\alpha\beta}}]$$

$L\boxtimes A'=T={}_{i}^{n}[\overset{\text{リンク}}{t_{i\beta}}]$　ここに，$l_{in}\boxtimes a'_{n\beta}$ に対する演算を，$a'_{n\beta}<0$ の時，$\bar{\alpha}=l_{in}+a'_{n\beta}$ とし，$a'_{n\beta}=0$ の時，0　$a'_{n\beta}>0$ の時 $\bar{\beta}=l_{in}$ とする。

この時 $t_{i\beta}$ は，$\begin{cases} t_{i\beta}=1 & (\bar{\alpha}=\bar{\beta}) \\ t_{i\beta}=0 & (\bar{\alpha}\neq\bar{\beta},\ \text{and}\ \bar{\alpha},\bar{\beta}\ \text{が存在しない時}) \end{cases}$

ここにおいてmatrix Tの要素 $t_{i\beta}$ が1であるリンクを取り出す時，i行ベクトルは，ノードiを出発点とする最短距離のTreeを表わしている。ただし次の事を仮定する。

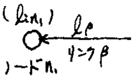
1.ネットに孤立したノードはない。

2.経路は最短距離をとり各ノード間の最短経路は1本である。

## 2-3　演算定義2の物理的意味と証明

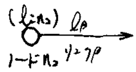
いま $a'_{n\beta}<0$ の時の $n$ を $n=n_1$，$a'_{n\beta}>0$ の時の $n$ を $n=n_2$ とする。Incidence matrix の性質より $n_1$ と $n_2$ は存在するとすれば必ず1つづつである。

(1) $a'_{n\beta}<0$ の時，すなわち $a'_{n\beta}=a'_{n_1\beta}$ の時



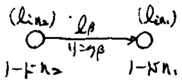

ノード$n_1$とリンクβは左図のように結びついていて，演算は $\bar{\alpha}=l_{in_1}+a'_{n_1\beta}$ である。すなわち $a'_{n\beta}=-l_\beta$ であるから $\bar{\alpha}=l_{in_1}-l_\beta$ となる。

(2) $a'_{n\beta}>0$ の時，すなわち $a'_{n\beta}=a'_{n_2\beta}$ の時




ノード$n_2$とリンクβは左図のように結びついている。演算は $a'_{n\beta}>0$ であるから $\bar{\beta}=l_{in_2}$ である。

(3) $\bar{\alpha}=\bar{\beta}$ すなわち $t_{i\beta}=1$ の時




$\bar{\alpha}=\bar{\beta}$ であるならば，(1)よりノード$n_1$に入ってくるリンクがβであると同時に，(2)よりノード$n_2$から出るリンクもβであって，しかも $l_{in_1}-l_\beta=l_{in_2}$ である。だから左図のようにノード$n_1$とノード$n_2$が結ばれていることがわかる。$l_{in_1}$と$l_{in_2}$は，ノードiからノード$n_1,n_2$までの最短距離数であり，最短経路は1本であると仮定していることから明らかに，ノード$n_2$に達する最短距離の経路には，リンクβが含まれていることがわかる。"そして"任意のノードから他のノードへの最短経路を重ねた時に出来るネットはTreeとなる。"という性質よりmatrix Tは，Treeを表わしていることがわかる。例題は，当日掛図によって説明する。