2次計画法による交通量配分

京都大学工学部　正員　米谷栄二
京都大学工学部　正員　飯田恭敬
日本道路公団　正員　○辻本有一

1．まえがき

輸送計画的な観点からの交通量配分はJ. G. Wardropによって最初に提案され、今日まで様々な形での定式化が試みられている。道路網における輸送計画では、対象とするネットワーク内のOD交通量分布が固有のものとして与えられるため、配分過程において各車はODを自由に選択することができないという制約をうけている上に、走行時間などであらわされる走行コストも各区間道路の交通量に依存した値をとると考えるのが現実的であるから、物資などの輸送問題とちがって定式化と求解がかなり困難となる。輸送計画的な交通量配分は、もともと現実のフローパターンに対する高い適合度をもった解がえられることに眼目をおいているのではなく、道路網の効率性に対する一つの尺度を提供することによって道路網計画などの分野において大きな意義を見出しうるものである。本研究では、各区間道路の走行時間がその交通量に線型に依存するとした場合、総走行時間を最小にするようなフローパターンを求めることが2次計画法（QP）の問題として定式化できることを示す。

2．2次計画法による定式化

対象とするネットワークに、n個のノード、m本のアークがあり、q個のODペアーにOD交通量が与えられるとする。kなるODの、ノードiからノードjへ向うアークijの交通量を$y_{ij}^{(k)}$とすれば、すべての$y_{ij}^{(k)}$が満たすべき条件はつぎの3種類である。

1). 交通量非負の条件 $y_{ij}^{(k)} \geq 0 \quad \begin{bmatrix} k=1,2,\cdots,q \\ ij=1,2,\cdots,m \end{bmatrix}$ ---------------------------- (1)

2). フローの連続の条件

$$\sum_j \left(y_{ij}^{(k)} - y_{ji}^{(k)}\right) = \begin{cases} S_k & (iがkなるODの発生ノードのとき) \\ -S_k & (iがkなるODの吸引ノードのとき) \\ 0 & (その他のとき) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} k=1,2,\cdots,q \\ i=1,2,\cdots,n-1 \end{bmatrix} \quad \text{------- (2)}$$

3). アークの交通容量の制限 $\sum_{k=1}^{q} y_{ij}^{(k)} \leq C_{ij} \quad [ij=1,2,\cdots,m]$ ------------------- (3)

こゝにS_kはkなるODのOD交通量、C_{ij}はアークijの交通量の上限値である。こゝでこのネットワークに対する$(n-1)$行m列のインシデンスマトリックスを$\mathbb{B}$とし、それを構成する列ベクトルを$\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \cdots, \mathbb{B}_m$とし、さらに式(3)を等式とするために$s_1, s_2, \cdots, s_m$なるスラック変数を導入し、

$$d_k' = \underbrace{(0,\cdots,0,\underset{(発生ノード)}{S_k},0,\cdots,0,\underset{(吸引ノード)}{-S_k},0,\cdots 0)}_{(n-1)次} \qquad [k=1,2,\cdots,q] \quad \text{---------------------- (4)}$$

$$\mathbb{C}' = (C_1, C_2, \cdots, C_{ij}, \cdots, C_m) \qquad \text{(5)}$$

なるベクトルを定義すれば、式(2),(3)は

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbb{1}_1 & \mathbb{1}_2 & \cdots & \mathbb{1}_m & I \\ \hline \begin{matrix} \mathbb{B}_1 & & \\ & \mathbb{B}_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbb{B}_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbb{B}_2 & & \\ & \mathbb{B}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbb{B}_2 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} \mathbb{B}_m & & \\ & \mathbb{B}_m & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbb{B}_m \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} \\ \vdots \\ y_1^{(q)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_{ij}^{(k)} \\ \vdots \\ y_m^{(q)} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{C} \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_q \end{pmatrix} \qquad \text{(6)}$$

と一括表示できる。こゝに $\mathbb{1}_\ell$ [$\ell=1,2,\cdots,m$] は第 ℓ 行の要素がすべて1で、他はすべて0である m 行 q 列の行列である。式(6)を

$$\mathbb{Q}\mathbb{Y} = \mathbb{d} \qquad \text{(7)}$$

とあらわせば、式(1)は

$$\mathbb{Y} \geq 0 \qquad \text{(8)}$$

となる。各アークの走行時間とその交通量の間に

$$t_{ij} = l_{ij}(a_{ij}X_{ij} + b_{ij}) = \alpha_{ij}\sum_{k=1}^{q} y_{ij}^{(k)} + \beta_{ij} \qquad (\alpha_{ij}, \beta_{ij} > 0) \qquad \text{(9)}$$

なる関係式がなりたつものとすれば、ネットワーク内の総走行時間Tは

$$T = \sum_{ij=1}^{m} \left\{ \left(\alpha_{ij}\sum_{k=1}^{q} y_{ij}^{(k)} + \beta_{ij}\right) \sum_{k=1}^{q} y_{ij}^{(k)} \right\} \qquad \text{(10)}$$

となる。こゝで

$$\mathbb{b} = (\underbrace{-\beta_1, -\beta_1, \cdots, -\beta_1, -\beta_2, \cdots, -\beta_{ij}, \cdots, -\beta_m}_{(mq)}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(m)}) \qquad \text{(11)}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2\alpha_1 & \cdots & 2\alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 2\alpha_1 & \cdots & 2\alpha_1 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2\alpha_2 & \cdots & 2\alpha_2 \\ \vdots & & \vdots \\ 2\alpha_2 & \cdots & 2\alpha_2 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2\alpha_{ij} & \cdots & 2\alpha_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ 2\alpha_{ij} & \cdots & 2\alpha_{ij} \end{matrix}}\,(q) & & \\ & & \scriptstyle (q) & \boxed{\begin{matrix} 2\alpha_m & \cdots & 2\alpha_m \\ \vdots & & \vdots \\ 2\alpha_m & \cdots & 2\alpha_m \end{matrix}} & \\ & & & & \begin{matrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \text{(12)}$$

と定義し、Tを最小にするかわりにF=−Tを最大にすることを考えれば、最大にすべき目的関数は

$$F(\mathbb{Y}) = -T = \mathbb{b}\mathbb{Y} - \frac{1}{2}\mathbb{Y}'\mathbb{A}\mathbb{Y} \qquad \text{(13)}$$

となる。従って問題は式(7),(8)の下で式(13)を最大にするべき $\mathbb{Y}$ を求めることとなる。行列 $\mathbb{A}$ は対称で正定値であるから、目的関数の凹性がつねに保証されており、式(7)が実行可能である限り従来いくつか開発されている2次計画法の解法のうちいずれかを採用することによって最適解を一意的に求めることが可能である。