

偶応力(Couple Stress)を考慮した粒状体の力学

神戸大学 正員 桜井春輔

1) はしがき

砂のような粒状体は、それを構成する各粒子の状態を完全に把握できれば、その挙動を完全に知ることができる。しかし非常に多くの粒子を含む集合体を考える場合、そのすべての粒子の状態を知り、理論的に検討を加えることは不可能である。一方、物体の状態が少数の物理量によって定められる場合がある。この巨視的な立場を取る物理学においては物質の連続性を仮定している。ここでは巨視的立場において粒子の集合体を表現する物理量を導入し、連続体の力学によって考察を行なう。

2) 粒状体における偶応力について

粒状体の挙動は粒子の回転によって大きく影響を受けるであろう。この回転を表わす物理量として、Couple Stress および Rotation が考えられる。そしてこれらを考慮した Couple Stress Theory が Truesdell¹⁾, Toupin²⁾, Mindlin³⁾ によって研究されている。しかし粒状体と考える場合には従来の Couple Stress Theory をそのまま適用することはできない。すなわち、この理論においては Internal energy density は常に正值であると仮定しているが、これはいかなる場合においても Couple stress によってエネルギーが蓄積されることを示している。一方、粒状体においては、粒子の回転の独立性のため、回転によってエネルギーが消費されると考えられる。したがって Internal energy density は次のように仮定すべきである。

$$W = \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - 2\eta \kappa_{ij} \kappa_{ij} - 2\eta' \kappa'_{ij} \kappa'_{ji} \quad (1)$$

ここで ϵ_{ij} および κ_{ij} はそれぞれ微小歪みおよび微小回転の勾配であり、それぞれ次のように表わされる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}), \quad \kappa_{ij} = \omega_{j,i}, \quad \omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} u_{k,j} \quad (2)$$

ここで u_i は変位である。また λ, μ は Lamé の定数であり、 η, η' は物質に固有の定数である。なおここで物体は等質、等方と仮定している。また物体が安定であるためには、 $W > 0$ でなければならない。

(1)式から応力-歪み関係は次のように求められる。

$$\sigma_{ij}^s = \partial W / \partial \epsilon_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad \mu_{ij}^p = \partial W / \partial \kappa_{ij} = -4\eta \kappa_{ij} - 4\eta' \kappa'_{ji} \quad (3)$$

ここで σ_{ij}^s は応力 σ_{ij} の Symmetric part を、また μ_{ij}^p は Deviatoric couple stress を表わす。すなわち $\sigma_{ij}^s = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji})$, $\mu_{ij}^p = \mu_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mu_{kk}$ (4)

(3)式から明らかなように μ_{ij} と κ_{ij} は、その方向が互に逆の関係にあり、したがって粒状体における偶応力は粒子が回転する際に、粒子相互の摩擦によって引き起さるものと解釈できる。

一方、応力は次の釣合方程式を満足しなければならない。すなわち

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0, \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + C_i = 0 \quad (5)$$

ここで F_i および C_i はそれぞれ体積力および体積偶力を表わす。したがって粒状体の挙動は

(2), (3), (5)式を境界条件を満足するように解くことによって得ることができる。しかし、これらの方程式は *Internal energy density* が正值の場合にのみ解の唯一性が証明されている。

3) 二次元問題

二次元平面歪み状態における *Couple Stress Theory* は Mindlin⁴⁾ によって研究されている。いま、(1)式の *Internal energy density* を考慮し、Mindlin の誘導に従えば、最終的に次の連立方程式を解くことによって二次元平面歪み状態における応力分布を求めることができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\Psi + \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= 2(1-\nu)\ell^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \Phi \\ \frac{\partial}{\partial y}(\Psi + \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= -2(1-\nu)\ell^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \Phi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

これは Cauchy - Riemann の関係であり、したがって $\Psi + \ell^2 \nabla^2 \Psi$ および $\nabla^2 \Phi$ は調和関数でなければならない。すなわち、

$$\nabla^2(\Psi + \ell^2 \nabla^2 \Psi) = 0, \quad \nabla^2(\nabla^2 \Phi) = 0 \quad (7)$$

ここで Φ および Ψ は Potential function であり、各応力は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \partial^2 \Phi / \partial y^2 - \partial^2 \Psi / \partial x \partial y, & \sigma_y &= \partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial x \partial y, & \tau_{xy} &= -\partial^2 \Phi / \partial x \partial y - \partial^2 \Psi / \partial y^2 \\ \tau_{yx} &= -\partial^2 \Phi / \partial x \partial y + \partial^2 \Psi / \partial x^2, & \mu_x &= \partial \Psi / \partial x, & \mu_y &= \partial \Psi / \partial y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ℓ は長さの単位を持つ物質に固有の定数である。なお、 Φ は古典弾性学における Airy's Stress function である。したがって古典弾性学において解かすでに得られている場合、すなわち Φ が既知ならば Ψ を容易に求め得る場合がある。すなわち、一般に重調和関数は次のように表わされる。

$$\Phi = \text{Re}\{\bar{z}g(z) + h(z)\} \quad (9)$$

ここで $g(z)$, $h(z)$ は Analytic function である。ただし $z = x + iy$ 。 (9)式を (6)式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\Psi + \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= 4(1-\nu)\ell^2 i \{g'(z) - \bar{g}'(\bar{z})\} \\ \frac{\partial}{\partial y}(\Psi + \ell^2 \nabla^2 \Psi) &= -4(1-\nu)\ell^2 \{g'(z) + \bar{g}'(\bar{z})\} \end{aligned} \right\}$$

したがって

$$\Psi = -8(1-\nu)\ell^2 \text{Im} g'(z) + \Psi^* \quad (10)$$

ここで Ψ^* は $\Psi + \ell^2 \nabla^2 \Psi = 0$ の解を表わす。

4) 例題

半無限に拡がりを持つ粒状体の表面に鉛直集中荷重が作用する場合を、二次元平面歪み状態として解いてみる。この場合の応力関数は

$$g'(z) = -\frac{P}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad h''(z) = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (11)$$

(11)式を (10)式に代入して

$$\Psi = -\frac{4(1-\nu)Pl^2}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

この場合、近似的に $\Psi^* = 0$ である。したがって応力分布は (9), (12)式を (8)式に代入して次のようになる。

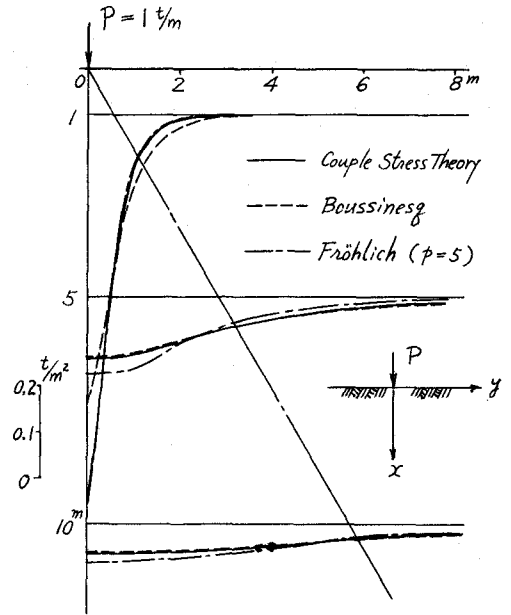
$$\left. \begin{aligned} \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \end{cases} &= -\frac{2Px^3}{\pi(x^2+y^2)^2} + \frac{8(1-\nu)Pl^2}{\pi} \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3} \\ \begin{cases} \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \end{cases} &= -\frac{2Px^2y}{\pi(x^2+y^2)^2} + \frac{8(1-\nu)Pl^2}{\pi} \frac{y^3-3yx^2}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\mu_x = \frac{8(1-\nu)Pl^2}{\pi} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \mu_y = -\frac{4(1-\nu)Pl^2}{\pi} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

いま $\nu=0.1$, $l=0.3^m$, $P=1 \text{ t/m}$ とした場合の $x=1, 5, 10^m$ の地点における σ_x の値を図に示す。またこの図には Boussinesq の解, および Frölich の解において集中係数 $p=5$ とした結果をも合せて示してある。

Couple Stress を考慮すれば Boussinesq の解より応力は載荷点に集中する傾向にある。なお Couple Stress の影響の無い地点を一点鎖線で図中に示す。これは Frölich の解と Boussinesq の解が等しくなる点とは一致している。

またこの図から明らかなように Couple Stress を考慮すれば表面においては Frölich の解より応力集中が大であり、内部ではほとんど Boussinesq の解と等しくなる。これは内部においては粒子が独立に回転し難く、したがって Couple Stress の影響はほとんど無視できるが表面付近では粒子の回転が容易であり、そのために応力は遠くまで伝達しないものと解釈できる。これは粒状体の性質を良く表わしているものと思われる。



参考文献

- 1) C. Truesdell and R.A. Toupin, "The Classical Field Theories", Encyclopedia of Physics, vol. 3/1, 1960, pp 226-793.
- 2) R.A. Toupin, "Elastic Materials with Couple-stresses", Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 11, 1962, pp 385-414.
- 3) R.D. Mindlin and H.F. Tiersten, "Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity", Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 11, 1962, pp 415-448.
- 4) R.D. Mindlin, "Influence of Couple-Stresses on Stress Concentrations", Exp. Mech., vol. 3, 1963, pp 1-7.