下水道計画に関する一考察

神戸大学工学部　学生員　○二神種弘
神戸大学工学部　学生員　吉原　寛
神戸大学工学部　正　員　清水　進

1．まえがき

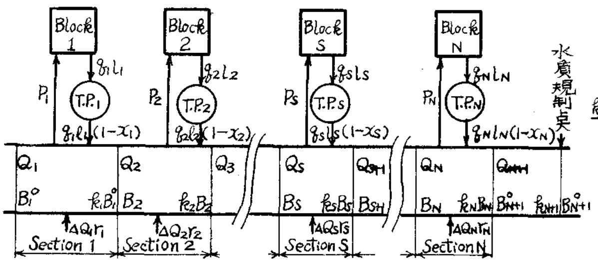
河川および河口における水質の悪化防止のために、下水道の緊急な整備が望まれている。下水道システムの最適計画に関する先駆的ともいうべき研究が、オペレーションズ・リサーチを用いて、末石、住友氏などによりなされている。[1),2),3)] 本研究では、動的計画法を用いて、下水道システムの最適化を計算した結果を報告する。

2．下水道システム計画と動的計画法

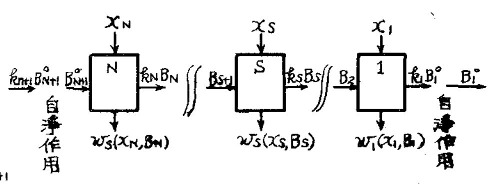
2－1．水系のモデル化

多段決定過程に基ずく動的計画法を、下水道システム計画に適用するために、水系を、図－1のようにモデル化する。[1)] 計算は、図－2に示すような後退型計算法を用いた。

図－1　水系のモデル化



図－2　多段決定過程（後退型）



Q_s：S番目の河川区間の初期流量（m^3/日）
q_s：Sブロックからの汚水量（m^3/日）
l_s：Sブロックからの汚水水質（ppm）
P_s：Sブロックの取水量（m^3/日）
ΔQ_s：S番目の河川区間の横からの流入量（m^3/日）
r_s：S番目の河川区間の横からの流入水の水質（ppm）
k_s：S番目の河川区間の減衰係数
B_s：S番目の河川区間の初期水質（ppm）
x_s：Sブロックの下水処理の除去率

S段階におけるシステムの状態	B_s
S段階における制御	x_s

関数方程式

$$B_s = \beta'_s B_{s+1} - \delta_s(1-x_s) - \beta'_s \alpha_s \qquad Q_{s+1} = Q_s - P_s + q_s + \Delta Q_s$$

$$B_{s+1} = \beta_s B_s + \gamma'(1-x_s) + \alpha_s \qquad \beta_s = (Q_s - P_s)k_s / Q_{s+1}$$

$$x_s = 1 + \delta'_s B_s - \delta_s B_{s+1} + \delta_s \alpha_s \qquad \gamma'_s = q_s l_s / Q_{s+1}$$

$$s = 1, \cdots\cdots N \qquad \alpha_s = \Delta Q_s r_s / Q_{s+1}$$

$$\beta'_s = 1/\beta_s,\ \delta_s = \beta'_s \gamma'_s,\ \delta'_s = 1/\delta_s,\ \gamma'_s = 1/\gamma_s$$

各段階の目的関数

$$w_s(x_s, B_s) = \boxed{水質汚濁防止費} - \boxed{利水便益}$$

$$= \boxed{\begin{array}{l}下水処理場建設費\\下水処理費\end{array}} + \boxed{浄水薬品費}$$

$$= f_s(x_s) + g_s(B_s)$$

制約条件

$$0 < x_s < 1$$

$$0 < B_s \leq \overline{B_s}$$

2－2．最適性の原理とフロー・チャート

$${}_N W_s^*(B_s) = \min_{x_N,\cdots x_{s+1},x_s} [w_N(B_N,x_N)+\cdots+w_{s+1}(B_{s+1},x_{s+1}) + w_s(B_s,x_s)]$$

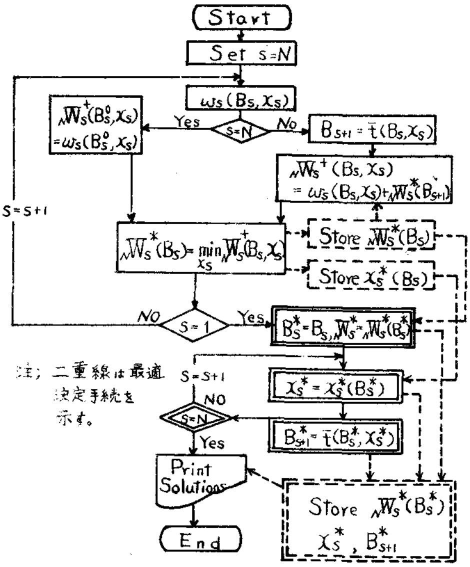
$$B_s = t_s(B_{s+1},x_s),\quad s=N,\cdots,1$$

$$= \min_{x_s}[w_s(B_s,x_s)+{}_NW_{s+1}^*(B_{s+1})]$$

$$= \min_{x_s}[{}_NW_s^*(B_s,x_s)]$$

$$B_s = t_s(B_{s+1},x_s),\quad s=N,\cdots 1$$

図-3　動的計画法のフローチャート



$x_s^*(B_s)$：条件つき最適除去率

${}_NW_s^*(B_s)$：N段階からS段階までの条件つき最小目的関数

x_s^*　：最適除去率

B_s^*　：最適水質状態

${}_NW_s^*$　：最小目的

2－3．繰り返し法による解

各段階における目的関数が、$w_s(x_s)=a_sx_s^2+b_sx_s+c_s$ で与えられる場合に対して、次の繰り返し法が、各段階で微分法を併用することにより導かれる。[4)]

$$x_s^*(B_s) = V_s(X_s)K_{s+1}/2K_s = {}_NL_s + 2{}_NA_{s+1}\gamma_s'\delta_N'{}_{N-1}\beta_{s+1}M_s(B_s)$$

$${}_NW_s^*(B_s) = {}_NA_s/K_s\cdot M_s^2(B_s)+{}_NG_s/K_s\cdot M_s(B_s) - {}_NH_s/4{}_NK_s + {}_NC_s$$

ここで

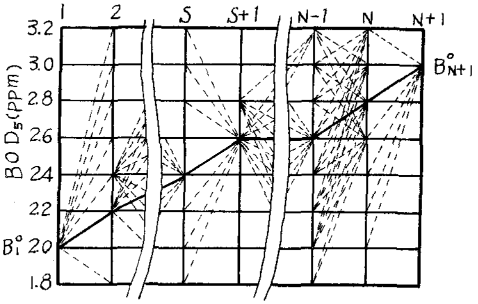
S＝Nのとき	S＝N-1のとき	S＝N-2, N-3, ・・・・・, 1 のとき
$V_N(B_N)=-b_N$	$V_{N-1}(B_{N-1})=2\gamma_{N-1}'\delta_N'a_NM_{N-1}(B_{N-1})+\gamma_{N-1}'\delta_N'b_N-b_{N-1}$	$V_s(B_s)=2{}_NA_{s+1}/K_{s+1}\cdot\gamma_s'\delta_N'{}_{N-1}\beta_sM_s(B_s)+{}_NG_{s+1}/K_{s+1}\cdot\gamma_s'\delta_N'{}_{N-1}\beta_{s+1}-b_s$
$M_N(B_N)={}_NN_N+\delta_N'B_N$	$M_{N-1}(B_{N-1})={}_NN_{N-1}+\beta_{N-1}\delta_N'B_{N-1}$	$M_s(B_s)={}_NN_s+\delta_s'{}_{N-1}\beta_sB_s$
${}_NN_N=1-\gamma_NB_{N+1}^0+\gamma_N\alpha_N$	${}_NN_{N-1}={}_NN_N+\delta_N'(\gamma_{N-1}'+\alpha_{N-1})$	${}_NN_s={}_NN_{s+1}+(\gamma_s'+\alpha_s)\delta_N'{}_{N-1}\beta_{s+1}$
${}_NL_N=0$	${}_NL_{N-1}=b_N\gamma_{N-1}'\delta_N'-b_{N-1}$	${}_NL_s={}_NG_{s+1}\gamma_s'\delta_N'{}_{N-1}\beta_{s+1}-b_sK_{s+1}$
${}_NK_N=1$	${}_NK_{N-1}=K_NK_{N-1}=K_{N-1}$	${}_NK_s={}_NK_{s+1}K_s=K_NK_{N-1}\cdots K_{s+1}K_s$
$K_N=1$	$K_{N-1}=a_N\gamma_{N-1}'^2\delta_N'^2+a_{N-1}$	$K_s={}_NA_{s+1}\gamma_s'^2\delta_N'^2{}_{N-1}\beta_{s+1}+a_sK_{s+1}$
${}_NA_N=a_N$	${}_NA_{N-1}=a_Na_{N-1}$	${}_NA_s={}_NA_{s+1}a_s=a_Na_{N-1}\cdots a_{s+1}a_s$
	${}_NG_{N-1}=b_Na_{N-1}+a_Nb_{N-1}\gamma_{N-1}'\delta_N'$	${}_NG_s={}_NG_{s+1}a_s+{}_NA_{s+1}b_s\gamma_s'\delta_N'{}_{N-1}\beta_{s+1}$
	${}_NH_{N-1}=(b_N\gamma_{N-1}'\delta_N'-b_{N-1})^2$	${}_NH_s=K_s{}_NH_{s+1}+{}_NL_s^2{}_NK_{s+2}$
	${}_{N-1}\beta_{N-1}=\beta_{N-1}$	${}_{N-1}\beta_s={}_{N-1}\beta_{s+1}\beta_s=\beta_{N-1}\beta_{N-2}\cdots\beta_{s+1}\beta_s$
		${}_NC_s={}_NC_{s+1}+C_s=C_N+C_{N-1}+\cdots+C_s$

2－4. 格子法による解

この方法は、図－4に示す格子図を用いて最適解を求める方法で、繰り返し法による解析的方法と比べて、計算量がぼう大となるが、微分法を各段階で併用できない目的関数をもつ計画問題に対して有効である。

図－4において、縦軸および横軸は、それぞれ水質状態および河川区間である。下流における、与えられた水質規制 B°_{N+1} から、上流水質 B°_{1} に到る最適水質の軌跡を求めることである。このために、N番目の制御 X_N から、N-1, N-2, ･･･, 1番目の制御へと順次1段づつ最適制御をおこない、各段階までの最適目的を求めながら、最適水質の軌跡を求めていく方法である。図－4における点線は、可能な経路の1部を示し、太実線は、えられた最適水質の軌跡を示す。

図－4 格子図



3. 淀川水系への適用

3－1. 淀川のモデル化

この研究では、代表水質として、BOD_5 を採用した。淀川水系の現在の行政区をもとに、上流点を宇治、下流の水質規制点を柴島とする8個のブロックにモデル化した。1985年の推定人口、および現在の取水状況を参考にして、各ブロックからの流入下水量 q_s、および各区間からの取水量 P_s をもとめた。[5] データ不足のために、横からの流入量 ΔQ_s は考慮しなかった。最近10年間の淀川の流量は、約 26.0×10^6 m³/日 であるが、汚濁の安全性を考慮して、上流点における流量 Q_1 を 20.0×10^6 m³/日 とした。各ブロックからの汚水の BOD_5 はすべて120 ppm と仮定した。下流点の柴島における BOD_5 は、3.0 ppmに規制した。上流点宇治の BOD_5 を 2.0 ppm と 2.5 ppmとした。

表－1　1985年における推定データ

Section S	Block Name	1985年推定人口 $\times10^3$(人)	取水量 P_s $\times10^6$(m³/日)	汚水量 q_s $\times10^6$(m³/日)	減衰係数 k_s	各区間初期流量 Q_s $\times10^6$(m³/日)	目的関数 下水処理場建設費＋全処理費 $\times10^9$ (Yen) $a_sX_s^2+b_sX_s+C_s$	浄水薬品費 (Yen)
1	宇治	200	0.200	0.100	0.96	20.000	34.68 －35.38＋14.07	$\frac{BOD_s}{1.6+2.3BOD_s}$ [6] ×
2	京阪	200	0.0	0.100	0.95	19.900	34.68－35.38＋14.07	
3	京都	1650	0.0	0.825	0.98	20.000	225.84－231.79＋88.26	$P_s\times365\times25$
4	乙訓・島本	100	0.0	0.050	0.95	20.825	20.53－21.21＋8.53	(s=1,･･･8)
5	枚方	320	0.280	0.160	1.00	20.875	54.02－55.84＋21.52	$\Delta Q_s=0$
6	高槻	400	0.0	0.200	0.98	20.755	65.70－68.76＋26.66	$\ell_s=120$ppm
7	寝屋川	150	0.075	0.075	0.96	20.955	26.92－27.54＋11.21	(s=1,･･･8)
8	守口	110	0.450	0.055	0.98	20.955	20.35－20.45＋8.52	

3－2．計算結果

表－3に示す3つの異った条件のもとに、最適解を求めたものが表－2に示される。

表－2　計算結果

S	Block Name	Planning 1		Planning 2				Planning 3			
		$B_i^o=2.0$		$B_i^o=2.0$		$B_i^o=2.5$		$B_i^o=2.0$		$B_i^o=2.5$	
		最適除去率 x_s^*	最適目的 $_NW_s^*$ $\times 10^9$(Yen)	最適除去率 x_s^*	最適目的 $_NW_s^*$ $\times 10^9$(Yen)	最適除去率 x_s^*	最適目的 $_NW_s^*$ $\times 10^9$(Yen)	最適除去率 x_s^*	最適目的 $_NW_s^*$ $\times 10^9$(Yen)	最適除去率 x_s^*	最適目的 $_NW_s^*$ $\times 10^9$(Yen)
8	守口	0.87	6.18	0.78	4.90	0.82	5.42	0.76	4.75	0.76	4.75
7	寝屋川	0.90	14.30	0.78	11.02	0.82	11.22	0.75	11.92	0.82	12.88
6	高槻	0.94	34.27	0.80	24.79	0.85	27.73	0.79	25.63	0.84	28.54
5	枚方	0.92	50.17	0.77	34.44	0.81	39.33	0.81	36.51	0.81	40.39
4	乙訓・島本	0.78	54.67	0.73	38.46	0.77	43.67	0.67	40.96	0.75	45.46
3	京都	0.91	118.10	0.81	87.01	0.86	99.46	0.81	89.44	0.86	100.82
2	京阪	0.82	126.48	0.74	93.87	0.78	106.99	0.71	95.85	0.77	108.16
1	宇治	0.82	134.87	0.64	99.47	0.67	112.96	0.71	102.21	0.77	115.50

表－3　計算条件

planning	自浄作用	目的関数	解法
1	考慮しない	建設費＋処理費	繰り返し法
2	考慮する	建設費＋処理費	繰り返し法
3	考慮する	建設費＋処理費＋浄水薬品費	格子法

4．考察

(1)動的計画法を用いることにより、利水便益をも同時に考慮して、下水道計画を立案することが可能である。

(2)状態変数として考えられる多くの水質指標が、BOD_5以外にもあるが、*Lagrange multiplier approach*、あるいは、*One-at-a-time method* を動的計画法に併用することによって、2つ以上の水質指標を同時に考慮して、最適計画をする可能性がある。

(3)目的関数設定にあたって、建設費と処理費の和を2次式 $f(x_s)=a_s x_s^2+b_s x_s+C_s$ によって表わしたが、2次式以外の適当な関数型を用いる方が、より合理的であるので、現在考察中である。

(4)前進型計算法による合理的な水質基準の設定の可能性。

参考文献

1)末石冨太郎：水質汚濁防止と下水道計画の最適化に関する研究，才2回衛生工学研究討論会，昭和40年．

2)住友恒：線型計画法による工業用水取得計画について，昭和39年度関西支部年次学術講演会．昭和39年．

3)住友恒：水処理効率の経済的評価について，才22回年次学術講演会，昭和42年．

4) R.Smith：Cost of Conventional and Advanced Treatment of Wastewater, Journal WPCF, Sept. 1968.

5)大阪府計画局：20年後の大阪に関する計画調査書．

6)小林康彦・坂本弘道：原水水質の経済的考察，水道協会雑誌，399号，昭和42年12月．