河川における土砂の浮遊限界について

京大防災研　　余越　正一郎

乱流状態にある河川流れにおいては，浮遊土砂は乱れの影響を受けて激しく上下に運動している。しかし浮遊土砂の粒径がある程度大きくなるとその沈降速度が上向きの乱れ速度より大きくなり，その高度においては存在しえなくなるであろう。鉛直方向乱子速度は河床からの高度の増加にともない減少するから，浮遊土砂の最大粒径は高度とともに減少しているのではないかと考えられる。

平均流で動く座標系から見た場合，乱子速度 V と寿命時間 τ の関係は，中間乱子領域においては良く知られているように $V^2 \sim \varepsilon\tau$（ε: 平均エネルギー逸散密度）。最小乱子領域においては分子粘性 ν を含んで表示されるはずで，$V^2 \sim \sqrt{\varepsilon^3/\nu}\,\tau^2$ となるであろう。このような考えに従い，寿命振動数を用いてスペクトルを次のように定義する。

$$F(n) = \begin{cases} 0 & : n < n_0 \\ \varepsilon n^{-2} & : n_0 \le n \le n_\infty \\ \sqrt{\varepsilon^3/\nu}\; n^{-3} & : n_\infty < n \end{cases} \qquad (1)$$

$n_0 \approx \varepsilon^{1/3} L^{-2/3}$，$n_\infty \approx \sqrt{\varepsilon/\nu}$ はそれぞれ最大乱子と最小乱子の寿命振動数である。

土粒子が実際に自分の沈降速度にさからって上昇するのは，鉛直方向の乱子速度の最大値によるものと考える。T時間内の鉛直方向の乱子速度 $\langle w^2\rangle^{1/2}$ とその最大値 w_{max} の関係を近似的に次で表わすことにする。

$$w_{max} = \langle w^2\rangle^{1/2}\sqrt{2\log(\nu_w T)}\ , \qquad (2)$$

$$\nu_w^2 = \int_0^\infty n^2 F(n)\,dn \Big/ \int_0^\infty F(n)\,dn . \qquad (3)$$

(1)で定義したスペクトルを用いて，(2)の w_{max} を求める。土粒子の粒径を d とし，d に相当する寿命振動数を n_d で表わすことにする。

(i) $n_d > n_\infty$（土粒子の粒径が最小乱子の寸法より小さい場合）。

(3)式の分子はいわゆる逸散スペクトルに相当するもので，分母は乱れのエネルギーを表わすものであるから，$n_0 \ll n_\infty$，$n_d = (\varepsilon^3/\nu)^{1/8} d^{-1/2}$ として次をえる。

$$\int_0^\infty n^2 F(n)\,dn = \int_{n_\infty}^{n_d} n^2\sqrt{\varepsilon^3/\nu}\,n^{-3}\,dn = \sqrt{\varepsilon^3/\nu}\,\log(n_d/n_\infty),\quad \int_0^\infty F(n)\,dn = \int_{n_0}^{n_\infty}\varepsilon n^{-2}\,dn = \varepsilon/n_0$$

したがって，$\nu_w^2 = n_0 n_\infty \log(n_d/n_\infty)$ となり，Tとして最大乱子の寿命時間をとると，$T = n_0^{-1}$，

$$w_{max} = \sqrt{(\varepsilon/n_0)\log[(n_\infty/n_0)\log(n_d/n_\infty)]} \qquad (4)$$

ここで，$\varepsilon/n_0 = \varepsilon^{2/3}L^{2/3}$，$n_\infty/n_0 = \sqrt{\varepsilon^{4/3}/n_0}\cdot L^{2/3}$，$n_d/n_\infty = (\nu^3/\varepsilon)^{1/8} d^{-1/2}$ である。

(ii) $n_d < n_\infty$ の場合.

$$\int_0^\infty n^2 F(n)\,dn = \int_{n_0}^{n_d} n^2\cdot\varepsilon n^{-2}\,dn = \varepsilon n_d,\quad \int_0^\infty F(n)\,dn = \int_{n_0}^{n_d}\varepsilon n^{-2}\,dn = \varepsilon/n_0$$

であるから $\nu_w^2 = n_0 n_d$ となり，結局次がえられる，この場合，$n_d = \varepsilon^{1/3} d^{-2/3}$ である。

$$w_{max} = \sqrt{(\varepsilon / n_0) \log (n_d / n_0)} \tag{5}$$

ここで，$n_d / n_0 = (L/d)^{2/3}$ である。

土粒子の粒径 d が最小乱子の寸法より大きいか小さいかで w_{max} の表示は(5), (4)のように異なるので，式の適用限界を与える最小乱子の寸法 l_∞ を評価しておかねばならない。オイラー的な2次の速度構造函数については良く知られていて，中間乱子領域では $D(r) = C(\varepsilon r)^{2/3}$，最小乱子領域では $D(r) = (1/15)(\varepsilon/\nu) r^2$ であるから，両方の曲線の交点に相当する距離 r でもって形式的に最小乱子の直径を定義する。C は多くの測定から，$C \approx 3/2$。

$$l_\infty = (15C)^{3/4} (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \approx 10\eta \quad , \quad \eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \text{: Kolmogorov の microscale.}$$

著者の宇治川における測定結果によると，$l_\infty \approx 0.4$ cm 程度で，河床近くでもこの値からそんなに大きく減少してはいないようである。

$n_d < n_\infty$ の場合についてさらに計算してみる。最大乱子の寸法 L は河床からの高度 z に比例し，エネルギー逸散 ε はその高度におけるエネルギー生成と等しいと仮定し，さらにマサツ速度 u_* は河床から直線的に減少すると仮定すると，

$$L = kz, \quad \varepsilon = u_*^3 / kz \quad , \quad u_* = u_{*0} (1 - (z/H))$$

ここで k はカルマン定数，u_{*0} は河床面マサツ速度，H は水深である。これから(5)を計算すると，

$$w_{max} = \sqrt{2/3} \cdot u_{*0} (1 - (z/H)) \sqrt{\log (kz/d)} \tag{6}$$

がえられる。

一方，土粒子の沈降速度はその粒径によって表示がちがうが，$n_d < n_\infty$ の場合，すなわち $d \gtrsim 0.4$ cm の場合には，$w_g \sim \sqrt{gd}$（g：重力加速度）と考えてよかろう。結局，(6)で求めた w_{max} と w_g が等しい場合に土粒子が上昇と下降の限界にあると考えられる。

なお，(1)のスペクトル表示には数値定数を頭につけねばならないが，その値はまだ正確には解っていない。著者の考えによると，中間乱子領域のスペクトルの係数は1より大きく2より小さい値をとるものと考えられる。

また(1)のスペクトルは次のようにも表わすことが出来る。

$$F(n) = \begin{cases} \dfrac{\text{const.}\ \varepsilon}{n^2 \sqrt{1 + \text{const.} (n/n_\infty)^2}} & : n \geq n_0 \\ 0 & : n < n_0 \end{cases} \tag{7}$$