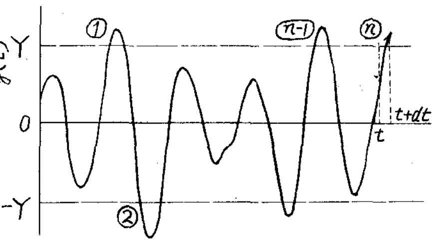
構造物の不規則振動に関する一考察
——応答が一定レベルを越える回数の確率分布について——

京都大学工学部　正会員　亀田弘行

1．まえがき　地震力や風力など，不規則に変動する荷重の作用時における構造物の動的挙動を明らかにするためには，現象を不規則振動論によって解析することが妥当であり，構造物の設計法を確立しようとする立場からは，構造物の非破壊確率を求めることが最も重要な目標の一つとなる。われわれは，従来の弾性設計法のように，許容応力，許容変位など，応答量の最大許容値を設定する場合に構造物の非破壊確率を表わす最大応答の確率分布について研究を進め，その結果について報告してきたが，動的外力による構造物の破壊は最大応答のみで一義的に定まるものではなく，くり返し載荷による疲労破壊に対しても十分な考慮が払われるべきである。本研究は，このような観点から，不規則外力を受ける構造物の応答が一定のレベルを越える回数の確率統計的性質について論じたものである。

2．基本的考察

対象とする構造物の応答を $y(t)$ とし，継続時間 τ の間に $|y(t)|$ が Y を越える回数を取り扱う。はじめに，図−1 のように，$|y(t)|$ が $(0, t)$ で Y を $n-1$ 回超過し，かつ n 回目の超過が $(t, t+dt)$ で生ずるという事象を $R_p(n, Y, t)$ で表わすものとし，これを用いて $g_n(Y,t)$, $\tilde{g}_n(Y,t)$ を次式のように定義する。



図−1　不規則外力に対する構造物の応答の概念図（(n)は，$|y(t)|$ が n 回目に Y を越えることを示す。）

$$\left.\begin{aligned} g_n(Y,t)\,dt &= P[\,|y(0)| \le Y \cap R_p(n,Y,t)\,] \\ \tilde{g}_n(Y,t)\,dt &= P[\,|y(0)| > Y \cap R_p(n,Y,t)\,] \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

式 (1) の $g_n(Y,t)$, $\tilde{g}_n(Y,t)$ は，いわゆる *first-passage-time probability density* の概念を拡張したものであるが，同式を用いると，応答の継続時間 τ 内で $|y(t)|$ が Y を n 回越える確率 $\Phi_n(Y,\tau)$ は次式により表わされる。

$$\Phi_n(Y,\tau) = \begin{cases} P[\,|y(0)| \le Y\,] - \int_0^\tau g_1(Y,t)\,dt & ,\ (n=0) \\ \int_0^\tau g_1(Y,t)\,dt - \int_0^\tau g_2(Y,t)\,dt + P[\,|y(0)| > Y\,] - \int_0^\tau \tilde{g}_1(Y,t)\,dt & ,\ (n=1) \\ \int_0^\tau g_n(Y,t)\,dt - \int_0^\tau g_{n+1}(Y,t)\,dt + \int_0^\tau \tilde{g}_{n-1}(Y,t)\,dt - \int_0^\tau \tilde{g}_n(Y,t)\,dt & ,\ (n \ge 2) \end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

したがって，継続時間 τ 内での超過回数が n 以下である確率，すなわち応答レベル Y の超過回数 n の確率分布を $\Phi_p(n;Y,\tau)$ とすると，

$$\Phi_p(n;Y,\tau) = \sum_{\nu=0}^{n} \Phi_\nu(Y,\tau) = \begin{cases} P[\,|y(0)| \le Y\,] - \int_0^\tau g_1(Y,t)\,dt & ,\ (n=0) \\ 1 - \left\{ \int_0^\tau g_{n+1}(Y,t)\,dt + \int_0^\tau \tilde{g}_n(Y,t)\,dt \right\} & ,\ (n \ge 1) \end{cases} \quad \cdots\cdots(3)$$

3. $g_n(Y,t)$, $\tilde{g}_n(Y,t)$ の誘導

時間軸上の $(0,t)$ を $t_i=i\Delta t$, $(i=0,1,2,\cdots,m)$; $\Delta t=t/m$ によって m 個の区間に分割する。区間 (t_{i-1},t_i) で $|y(t)|$ がレベル Y を上向きに越えるという事象を e_i, $|y(0)|\leq Y$ なる事象を a_0, それらの余事象をそれぞれ $\bar{e}_i$, $\bar{a}_0$ とすると, $g_n(Y,t)$ は次式のように表わされる。

$$g_n(Y,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}P\Big[\bigcup_{i_1=1}^{m-n+1}\bigcup_{i_2=i_1+1}^{m-n+2}\cdots\bigcup_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{m-1} a_0\bar{e}_1\bar{e}_2\cdots\bar{e}_{i_1-1}e_{i_1}\bar{e}_{i_1+1}\cdots\bar{e}_{i_2-1}e_{i_2}\bar{e}_{i_2+1}\cdots\bar{e}_{i_{n-1}-1}e_{i_{n-1}}\bar{e}_{i_{n-1}+1}\cdots\bar{e}_{m-1}e_m\Big]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}P\Big[\bigcup_{i_1=1}^{m-n+1}\bigcup_{i_2=i_1+1}^{m-n+2}\cdots\bigcup_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{m-1} a_0(1-e_1)(1-e_2)\cdots(1-e_{i_1-1})(1-e_{i_1+1})\cdots(1-e_{i_2-1})(1-e_{i_2+1})\cdots(1-e_{i_{n-1}-1})(1-e_{i_{n-1}+1})\cdots$$

$$\cdots(1-e_{m-1})e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{n-1}}e_m\Big]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\binom{n+m-2}{n-1}\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{n+m-3}}^t f_u(Y;t_1,t_2,\cdots,t_{n+m-2},t)\,dt_{n+m-2} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ただし, $f_u(Y;t_1,t_2,\cdots,t_\ell)dt_1dt_2\cdots dt_\ell=P[a_0\cap\{\bigcap_{i=1}^{\ell}|y(t_i)|\leq Y\cap|y(t_i+dt_i)|>Y\}]$

同様に,

$$\tilde{g}_n(Y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\binom{n+m-2}{n-1}\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{n+m-3}}^t \tilde{f}_u(Y;t_1,t_2,\cdots,t_{n+m-2},t)\,dt_{n+m-2} \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\tilde{f}_u(Y;t_1,t_2,\cdots,t_\ell)dt_1dt_2\cdots dt_\ell=P[\bar{a}_0\cap\{\bigcap_{i=1}^{\ell}|y(t_i)|\leq Y\cap|y(t_i+dt_i)|>Y\}]$$

式(4),(5)で, f_u, $\tilde{f}_u$ の次元数は無限大まで必要であり, 数値計算を行なうことはきわめて困難であるので, 近似的な評価を行なう。図－1において $|y(t)|$ が Y を超過する事象で, n 回目の超過は厳密には確率統計的にはそれ以前の超過の回数およびそれらが生じた時刻と独立ではないが, いまこれを, $n-1$ 回目の超過のみに影響されるものと仮定する。さらに $y(t)$ を定常確率過程とすると, f_u, $\tilde{f}_u$ は次式のように表わされる。

$$f_u(Y;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_u(Y;t_1)\prod_{i=1}^{n-1}f_c(Y;t_{i+1}-t_i),\quad \tilde{f}_u(Y;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\tilde{f}_u(Y;t_1)\prod_{i=1}^{n-1}f_c(Y;t_{i+1}-t_i) \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

ただし,

$$f_c(Y,t)dt=P[|y(t)|\leq Y\cap|y(t+dt)|>Y\,\|\,|y(0)|=Y\cap|y(dt)|>Y]$$

式(6)を式(4),(5)に代入すれば, 次式が得られる。

$$g_n(Y,t)+\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{\nu-1}}^t g_n(Y,t_1)f_c(Y,t-t_\nu)\prod_{\mu=1}^{\nu-1}f_c(Y,t_{\mu+1}-t_\mu)\,dt_\nu$$

$$=\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{n-2}}^t f_u(Y,t_1)f_c(Y,t-t_{n-1})\prod_{\mu=1}^{n-2}f_c(Y,t_{\mu+1}-t_\mu)\,dt_{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\tilde{g}_n(Y,t)+\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{\nu-1}}^t \tilde{g}_n(Y,t_1)f_c(Y,t-t_\nu)\prod_{\mu=1}^{\nu-1}f_c(Y,t_{\mu+1}-t_\mu)\,dt_\nu$$

$$=\int_0^t dt_1\int_{t_1}^t dt_2\cdots\int_{t_{n-2}}^t \tilde{f}_u(Y,t_1)f_c(Y,t-t_{n-1})\prod_{\mu=1}^{n-2}f_c(Y,t_{\mu+1}-t_\mu)\,dt_{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

式(7),(8)より $g_n(Y,t)$, $\tilde{g}_n(Y,t)$ を求め, 式(2)または(3)に用いれば, 継続時間 T の間に応答が一定のレベルを越える回数に関する確率および確率分布が求められる。
数値計算結果は講演時に報告する。