

非線形1自由度系の最大応答の確率分布について

京都大学工学部 正 員 工 修 亀田弘行
 京都大学工学部 学生員 工 修 〇北浦 勝

1. はしがき 構造物の耐震設計にあたっては、地震時における構造物の挙動と可能な限り正確に把握することが望ましい。しかしながら構造物に作用する地震波は、場所・地盤や時間が異なれば変化するので、現在においては確率関数として表わすことは困難であり、むしろ確率量としてとらえるべきであると思われる。このように考えると、地震波が入力として作用することにより生ずる構造物の応答も、やはり確率量と考えてよいであろう。それゆゑ耐震設計において、応答が許容限界値を超えようかどうかと問題とする場合には、最大応答があるレベルを超えない確率、すなわち最大応答の確率分布を用いて判定するのが好ましいと考えられる。線形復元力と有する系の最大応答の確率分布に関してはすでにいくつかの近似解が報告されている¹⁾。本文では復元力が非線形性と有する系の最大応答の確率分布と、いくつかの仮定のもとに理論的に求め、若干の考察を行ない、あわせてその精度の検討を行なったものである。

2. 非線形1自由度系の運動方程式 構造物とある一定の荷重レベルで加振すると、復元力-変位曲線は一定の履歴ループを描く。荷重レベルを増すにつれてそのループも大きくなるが、そのようなループの最大点と結んだ曲線(これと最大点曲線と呼ぶことにする)が構造物の応答特性に大きな影響を与える²⁾。また復元力曲線が履歴ループを描くことにより、構造物はその内部で永久歪エネルギーを消費し、いわゆる履歴減衰と呼ばれる減衰が生ずる。そこで以下の解析を簡単にするために履歴復元力と、最大点曲線よりなる復元力と、履歴減衰力と等価な粘性減衰力の二者に置き換える。このような等価復元力と有する1自由度系の運動方程式は次式のように表わすことができる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + M(x) = -\frac{d^2z}{dt^2} \quad \text{----- (1)}$$

ただし x : 規準変位 z_0 で無次元化された応答変位 α : 復元力曲線の囲む面積により定まる減衰定数 ω_0 : 変位が小なる範囲においては復元力曲線は線形であると考えられるが、そのような範囲内で構造物が振動する場合の非減衰固有円振動数 T : 無次元化された時間。時間 t との間に $T = \omega_0 t$ なる関係がある。 z : z_0 で無次元化された外力としての強制変位であり、 $E[\ddot{z}(t)] = 0$, $E[\ddot{z}(t_1) \cdot \ddot{z}(t_2)] = 2D \cdot \delta(t_1 - t_2) / (\omega_0^3 x_0^2)$ なる white noise であるとする。ここに D は正定数である。 $M(x)$: 履歴曲線の最大点曲線で、つぎのような二者と考える。

$$M(x) = x + \beta x^3 \quad \text{----- (2)}$$

$$M(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{\alpha\beta} - \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha\beta}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{x}{\alpha\beta} - \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha\beta}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\beta}\right)^3}} \quad \text{----- (3)}$$

前者は硬化バネ型、後者は軟化バネ型の最大点曲線である。また式(3)は式(2)の直線 $M(x) = x$ に関する対称式と整理したものである。 β は復元力曲線の線形からの離脱の程度

を示す量である。

3. 最大応答の確率分布 式(1)の解として得られる応答変位 x と応答速度 $\dot{x}$ との同時確率密度 $p(x, \dot{x})$ はFokker-Planckの式と解くことにより、つぎのように求まる。ただし応答は定常確率過程であり、また x と $\dot{x}$ とは互いに独立であるとする。 $M(x)$ が硬化バネ型の場合には、

$$p(x, \dot{x}) = \sqrt{\frac{\eta}{2\pi}} \frac{\exp\{-\eta \dot{x}^2 - \eta(x x'' + \delta x \dot{x}')\}}{\int_0^\infty \exp\{-\eta(x x'' + \delta x \dot{x}')\} dx} \quad (4)$$

となる。ここに η :構造物のゆれにくさを表わす指標で、 $\eta = \eta_0 \omega_n^2 x_D^2 / (x_D)$ である。さて、無次元化された継続時間 $\tau_d (-\omega_n \tau_d)$ における x の絶対最大値の確率分布 $\Phi(R, \tau_d)$ は、

$$\Phi(R, \tau_d) = P[\max |x(\tau)| \leq R; 0 \leq \tau \leq \tau_d] \quad (5)$$

となる。式(5)の厳密解を具体的に表わすことは困難であるので、すでに提案されている近似解法を適宜して議論を進める³⁾。ある時刻における応答はそれ以前の応答経歴に影響されないとし、式(4)を用いて式(5)を変形すると、次式のようになる。

$$\Phi(R, N) = \frac{\int_0^R \exp\{-\eta(x x'' + \delta x \dot{x}')\} dx}{\int_0^\infty \exp\{-\eta(x x'' + \delta x \dot{x}')\} dx} \exp\left[-N \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \frac{\exp\{-\eta(x R x'' + \delta R \dot{x}')\}}{\int_0^R \exp\{-\eta(x x'' + \delta x \dot{x}')\} dx}\right] \quad (6)$$

ただし、 N は継続時間 τ_d の非減衰固有周期 $T (-x\pi/\omega_n)$ に対する比で、 $N = \tau_d / T = \tau_d / x\pi$ なる関係がある。ほぼ同様にして $M(x)$ が軟化バネ型の場合の $\Phi(R, N)$ は、

$$\Phi(R, N) = \frac{\int_0^R \exp\{-\eta\{\alpha\delta(a^2 + b^2)^x - x(a^2 + b^2)^x\}\} dx}{\int_0^\infty \exp\{-\eta\{\alpha\delta(a^2 + b^2)^x - x(a^2 + b^2)^x\}\} dx} \exp\left[-N \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \frac{\exp\{-\eta\{\alpha\delta(a^2 + b^2)^R - x(a^2 + b^2)^R\}\}}{\int_0^R \exp\{-\eta\{\alpha\delta(a^2 + b^2)^x - x(a^2 + b^2)^x\}\} dx}\right] \quad (7)$$

となる。ただし $a = \sqrt[3]{\frac{x}{x\delta} + \left(\frac{x}{x\delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\delta}\right)^3}$, $b = \sqrt[3]{\frac{x}{x\delta} - \left(\frac{x}{x\delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\delta}\right)^3}$ ----- (8)

であり、 a, b はそれぞれ a, b と与える式の右辺中の x を R に置き換えたものである。式(6)および式(7)により与えられる $\Phi(R, N)$ の理論値の精度と検討するために、シミュレーションを行ない、理論値との比較を行なった。前述のような性質を持つ δ と電子計算機で発生させ、この δ が外力として作用した

場合の x の最大値を求め、そのようにして得た最大応答の累積頻度より $\Phi(R, N)$ を実験的に推定した。図1、2に $M(x)$ が硬化バネ型および軟化バネ型の場合の $\Phi(R, N)$ の理論値および実験値の一例を示した。同図より応答レベルが大となるほど理論値は実験値に一致する傾向にあることがわかる。また N や η が増すにつれて両者は一致する傾向にあることも確かめられた。これらについての詳細は講演時に報告する。

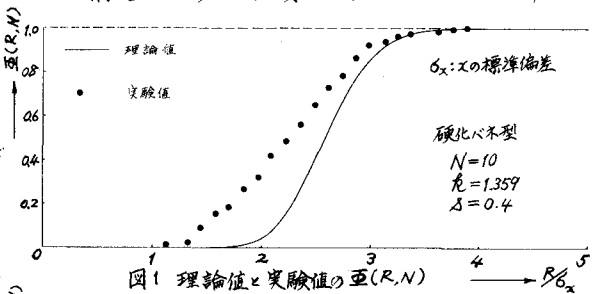


図1 理論値と実験値の $\Phi(R, N)$

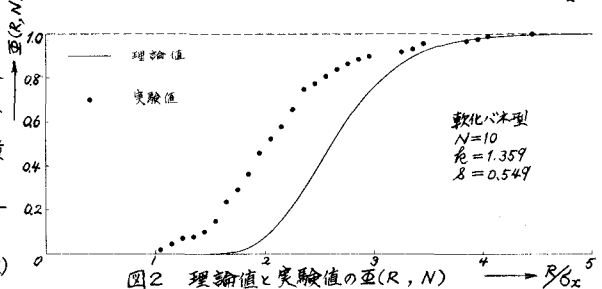


図2 理論値と実験値の $\Phi(R, N)$

1) 後藤 竜田: 京大防災研究所年報, 11号A, 423-433.
2) 土岐 安藤: 土木学会第22回講演概要第2工部. 3) 前出1)