

多柱式基礎の立体振動

大阪市立大学 正員 倉田宗章
 大阪工業大学 正員 岡村宏一
 近畿地方建設局 正員 多田浩彦
 大阪設計コンサルタンツKK 正員 進藤泰男

1) まえがき さきに、本州四国連絡橋下部工の一形式として立案されている多柱式基礎の平面内の振動について報告した。この基礎は図-1に概要を示すように、大口径の鋼製 *Cylindor* を沈下根入れさせて、支持層に到達させ、頂部を剛性の頂板で連結する大規模なものである。特にこの構造は施工上の制約のために水深の大きなところで並立した *Cylindor* によって構成されており、海底地盤の傾斜や、地震の作用方向等を考慮すれば、ねじれ振動をも含めた立体振動についても構造上安全であるかどうかについて検討しておかなければならない。本文ではこの基礎について、任意方向の地震力を受ける場合の立体構造としての並進、ロッキング、ねじりの剛体系振動と柱の弾性振動を連成させる解析法を述べ、又本州四国連絡橋下部工として計画中の1基礎について計算例を提示する。

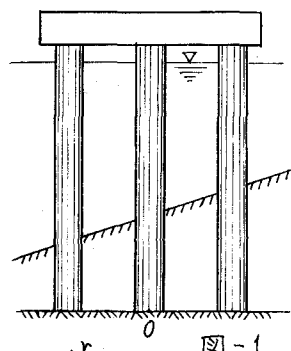


図-1

2) 基本仮定 頂板は剛体、柱及び地盤は弾性体と見做し、各柱は等却、剛度一定とし、若干個の *lumped mass* に、頂板は単一 *mass* に分割し、地盤も集中バネで置換する。地震作用方向は図-2に示すように任意角 θ で定義された S 軸で、直角方向は r 軸で表わす。この系の振動は構造全体の剛体としての並進運動、回転運動及び、ねじれ振動と柱の構造要素としての弾性振動、以上4つの連成されるものである。

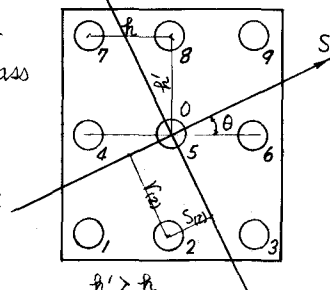


図-2

3) 水平運動方程式 式は便宜的に柱部分と頂板部分にわけて考える。

3-1) *lumped mass* について 立体振動である r, S 2方向に発生する。図-3は S 方向の変形を示している。①-②線は柱の静止位置、①-①線は地動 u_0 の並進位置、②-②線は柱頭部の拘束曲げによる弾性変形位置、③-③はせん断変形とねじりによる S 方向変形の和である。 r 方向については、 $u_0 \rightarrow 0$, $p_k y_s \rightarrow p_k y_r$, $u_k \rightarrow v_k$ とおきかえればよい。よって k 番柱の *lumped mass* m_k の S, r 方向の水平変位は

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_k &= u_k + p_k y_s + u_0 = z_k + u_0 \\ v_k &= v_k + p_k y_r = c_k \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに z_k, c_k は 質点の S 及び r 方向の全弾性変位量を示す。(図参照)

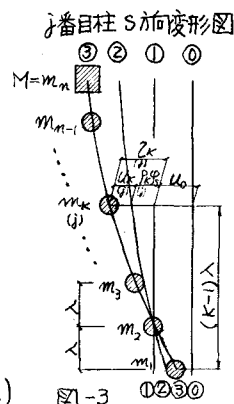


図-3 ①②③④

j番柱の水平運動方程式は減衰力を考慮して次のように書かれる。

$$S \text{ 方向: } m_k(\ddot{u}_k + \ddot{y}_s f_k) + \sum_{i=1}^n f_{si}^{sk} u_i + f_{sn}^{sk} \omega + C_k(\dot{u}_k + \dot{y}_s f_k) = -m_k \ddot{u}_0 \quad (2)$$

$$r \text{ 方向: } m_k(\ddot{v}_k + \ddot{y}_r f_k) + \sum_{i=1}^n f_{ri}^{rk} v_i + f_{rn}^{rk} \omega + C_k(\dot{v}_k + \dot{y}_r f_k) = 0 \quad (3)$$

(j=1, 2, \dots, q), \quad (k=1, 2, \dots, n-1)

ただし ω : 頂板におけるねじれ回転角, $C_k = \mu m_k$; 減衰係数 (j) は柱番号を示す。

$f_{si}^{sk} = f_{ri}^{rk}$ (4) (円柱のr方向): 水平せん断力影響係数で図-4のヤコク *lumped mass*

の位置に支束を設けて連続梁を考え、し支束のみが単位変位するとき他の支束に

生ずる反力を求めれば、これが f_{si}^{sk} である。はめ地中の *mass* については更に f_{sn} を加え

る必要がある。 f_{si}^{sk}, f_{ri}^{rk} : 頂板が単位ねじれ r ときの k 本の反力、図-5を参照し

て容易に次の関係が求まる。 $f_{sn}^{sk} = f_{sn}^{sk} r$, $f_{rn}^{rk} = -f_{sn}^{sk} s = -f_{sn}^{sk} \frac{s}{r}$ (5)

f_k : 図-4の系の頭部に曲げを1力かせ、各 *mass* 点の変位を頭部の回転角 θ で表わせば、その係数として計算される。

3-2) 頂板について 頂板は剛体で質量は M である。よって各柱の変位は頂板の位置 m においてすべて等しい。ただしねじれ変位は各柱頭で異なるので頂板ではねじれ振動は別の系として扱う。

$$M(\ddot{u}_m + \ddot{y}_s f_m) + \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n f_{si}^{sm} u_i + C_m(\dot{u}_m + \dot{y}_s f_m) = -M \ddot{u}_0 \quad (6)$$

$$M(\ddot{v}_m + \ddot{y}_r f_m) + \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n f_{ri}^{rm} u_i + C_m(\dot{v}_m + \dot{y}_r f_m) = 0 \quad (7)$$

$$I \ddot{\omega} + \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} (f_{si}^{sn} u_i + f_{ri}^{rn} v_i) + f_{sn}^{sn} \omega + \bar{C} \dot{\omega} = 0 \quad (8)$$

ただし、 I : 頂板の垂直重心軸に関する慣性性能率 $= M \frac{h^2 + h'^2}{3}$ (h, h' は図-2参照)

$C_n = \mu M$, $\bar{C} = \mu I$; n 本のせん断減衰係数 B のねじれ減衰定数

相反作用の定理から $f_{si}^{sn} = f_{sn}^{si}$, $f_{ri}^{rn} = f_{rn}^{ri}$ (9)

更に図-5より $f_{sn}^{sn} = \sum_{j=1}^q [f_{sj}^{sn} r_j^2 + f_{rj}^{sn} s_j^2]$ (10)

4) 回転運動方程式 構造下端に原点を持つ S 軸, r 軸まわりの

モーメント釣合から、 q 本分の柱を考えて次式が成立つ。

$$S \text{ 方向: } \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n u_i \sum_{k=1}^n f_{si}^{sk} (k-1)\lambda + \omega \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{n-1} f_{sn}^{sk} (k-1)\lambda - \bar{C}_s \dot{y}_s - M \ddot{y}_s - \sum_{j=1}^q M u_j = 0 \quad (11)$$

$$r \text{ 方向: } \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n v_i \sum_{k=1}^n f_{ri}^{rk} (k-1)\lambda + \omega \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{n-1} f_{rn}^{rk} (k-1)\lambda - \bar{C}_r \dot{y}_r - M \ddot{y}_r - \sum_{j=1}^q M v_j = 0 \quad (12)$$

式中、 $\bar{C}_s = \mu I_s$, $\bar{C}_r = \mu I_r$; S 及び r 方向の回転減衰定数, $M y_s, M y_r$ はそれぞれ各柱の鉛直反力

による r 軸, S 軸まわりの復元モーメントで、図-1より柱配置の対称性を考慮すれば θ にかかわらず

$$M y_s = y_s [2 f_e \{ S_{(3)}^2 + S_{(6)}^2 + S_{(8)}^2 + S_{(9)}^2 \} + y_r \{ 2 f_e \{ S_{(3)} r_{(3)} + S_{(6)} r_{(6)} + S_{(8)} r_{(8)} + S_{(9)} r_{(9)} \}] \quad (13)$$

$$M y_r = y_r [2 f_e \{ S_{(6)} r_{(6)} + S_{(8)} r_{(8)} + S_{(9)} r_{(9)} \} + y_s \{ 2 f_e \{ r_{(3)}^2 + r_{(6)}^2 + r_{(8)}^2 + r_{(9)}^2 \}] \quad (14)$$

と表わされる。ここに f_e : 鉛直バネ係数, $S_{(j)}, r_{(j)}$: j 番柱から S, r 両軸までの距離 (図-1参照)

さらに (11), (12) 式中の $\sum_{j=1}^q M u_j, \sum_{j=1}^q M v_j$ は地中部分の柱に付く全水平反力による S, r 方向の復元モー

メントで地中部分の *mass* の口数を γ_j とすれば、次式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^q M u_j = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n f_{ei} \gamma_i (i-1)\lambda, \quad \sum_{j=1}^q M v_j = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n f_{ei} \gamma_i (i-1)\lambda \quad (15)$$

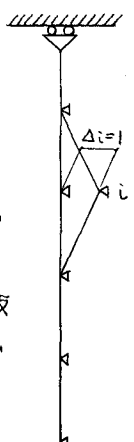


図-4

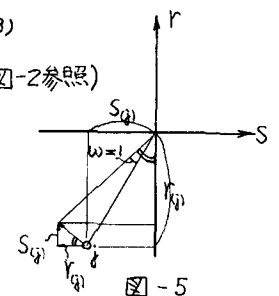


図-5

以上の(2),(3),(6),(7),(8),(11),(12)を連立微分方程式として解ける。本文においては弾性振動式は modal analysis を行い、さらに回転運動方程式と共に差分化して、1次式において演算を行った。次に \$u_i\$ の解法の概略を記す。

5) 解法: (2)(3)式に(1)(4)(5)を代入し、(6),(7),(8)に(1),(9)を代入し、(11),(12)に(1)(13)(14)(15)を代入して整理すれば次式のようになる。

$$m_k \ddot{z}_k + \sum_{i=1}^n p_{ik}^{sk} z_i + p_{sk}^{sn} r \omega + C_k \dot{z}_k = -m_k \ddot{u}_0 + q_s \sum_{i=1}^n p_{ik}^{sk} p_i \quad (2')$$

$$m_k \ddot{c}_k + \sum_{i=1}^n p_{ik}^{sk} c_i - p_{sk}^{sn} s \omega + C_k \dot{c}_k = \quad + q_r \sum_{i=1}^n p_{ik}^{sk} p_i \quad (3')$$

(j=1,2,3,...,q), (k=1,2,3,...,n-1)

$$M \ddot{z}_n + \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n p_{in}^{sj} z_i + C_n \dot{z}_n = -M \ddot{u}_0 + q_s \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n p_{in}^{sj} p_i \quad (6')$$

$$M \ddot{c}_n + \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n p_{in}^{sj} c_i + C_n \dot{c}_n = \quad + q_r \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n p_{in}^{sj} p_i \quad (7')$$

$$I \ddot{\omega} + \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} p_{ij}^{sn} r z_i - \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} p_{ij}^{sn} s c_i + p_{nn}^{sn} \omega - \bar{C} \dot{\omega} = q_s \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} p_{ij}^{sn} p_i r - q_r \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} p_{ij}^{sn} p_i s \quad (8')$$

$$\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n z_i \sum_{k=1}^n p_{ik}^{sj} (k-1) \lambda + \omega \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} p_{ij}^{sn} r (k-1) \lambda - \bar{C}_s \dot{\omega} - S q_s - R q_r - \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n p_{ij}^{sj} z_i (i-1) \lambda = q_s \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^n p_{ik}^{sj} (k-1) \lambda \quad (11')$$

$$\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^n p_{ik}^{sj} (k-1) \lambda - \omega \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} p_{ij}^{sn} s (k-1) \lambda - \bar{C}_r \dot{\omega} - S q_s - R q_r - \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n p_{ij}^{sj} c_i (i-1) \lambda = q_r \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^n p_{ik}^{sj} (k-1) \lambda \quad (12')$$

上式中(2')(3')(6')(7')(8')は構造物の弾性振動を表わしているで、基準振動に分解して取扱う。これらの式を Matrix 表示すれば

$$M \ddot{Z} + P Z + C \dot{Z} = -M \ddot{X} + P P P \bar{P} \quad (16) \text{ とする。}$$

上式中 \$M, P, C, P\$ は行列, \$\ddot{Z}, \dot{Z}, Z, \ddot{X}, \dot{X}, X, \bar{P}\$ は列ベクトル (各要素は紙面の都合により省略)

(16)式の自由振動方程式は \$|P - p^2 M| = 0\$ (17) なる行列式となり、これを解いて、\$p_i^2\$ (\$i=1,2,3,...,3(6n-5)\$) なる固有値 (自由振動数) とそれに対応する modal matrix

\$\Phi = [e_{ij}]\$ が求まる。いま \$Z = \Phi Z'\$ (18) なる新たな座標系を考え、(16)式に代入し直交性の条件を用いて整理すれば(16)は結局次式のような1自由度の微分方程式となる。

$$\ddot{Z}' + \Lambda Z' + \mu \dot{Z}' = -\Phi' M \ddot{X} + \Phi' P P P \bar{P} \quad (18')$$

上式中 \$\Lambda, P\$ を要素とする diagonal matrix, \$\Phi'\$; \$\Phi\$ の転置行列、(18)及び(11')(12')中の時間による微分項をさらに差分化して、整理すると次の一次式を得る。

$$\text{変位式 } Z_{n+1} = \frac{2 + \mu \Delta t - (P \Delta t)^2}{1 + \mu \Delta t} Z_n - \frac{1}{1 + \mu \Delta t} Z_{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{1 + \mu \Delta t} (q_s \ddot{\gamma}_n + q_r \ddot{\delta}_n - \ddot{u}_n \alpha_n) \quad (19)$$

$$\text{上式中 } \alpha_j = \sum_{i=1}^{q(n-1)+1} e_{ij} m_i, \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^{q(n-1)+1} e_{ij} p_i + e_{3(6n-5),j} p_{3(6n-5)}, \quad \delta_j = \sum_{i=1}^{13(n-1)+2} e_{ij} p_i + e_{3(6n-5),j} p_{3(6n-5)} \quad (20)$$

$$p_i = \sum_{k=1}^{3(6n-5)} p_{ik}^{sk} p_k, \quad p_{3(6n-5)} = \sum_{j=1}^{q(n-1)+1} p_{5,j}^{s,3(6n-5)} p_j, \quad \bar{p}_{3(6n-5)} = \sum_{j=1}^{13(n-1)+2} p_{5,j}^{s,3(6n-5)} p_j$$

(19)の \$Z_{n+1}\$ の suffix: (n+1) は時刻を示す。 \$\mu = 2Lp_i\$ かつ \$L = 0.05\$ (減衰率)

初期値接続問題として (19), (20) から $\sum_{r=1}^{m+1} r$ が求まれば, 各質点の S 及び r 方向変位及びねじれ角は (18)

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \gamma_{n+1} = \sum_{r=1}^{m+1} e_{sr} \gamma_{n+1} \quad \left\{ S = (j-1)(n-1) + i \leq 9n-8 \right\} \\ \zeta_{n+1} &= \zeta_{n+1} = \sum_{r=1}^{m+1} e_{sr} \zeta_{n+1} \quad \left\{ S = 9n-8 + (j-1)(n-1) + i < 3(6n-5) \right\}, \quad \omega_{n+1} = \sum_{r=1}^{m+1} e_{sr} \omega_{n+1} \quad \left\{ S \geq 3(6n-5) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式から, 各々の弾性変位が求まれば, 次式に代入して, S 及び r 方向の剛体回転角が計算される。

$$\begin{aligned} S \text{ 方向 } \gamma_{n+1} &= \frac{\Delta t}{C_s} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} \left\{ S_{SC}^{SK}(k-1) \lambda - (1-H_{ij}) p_{ei}(i-1) \lambda \right\} \zeta_{n+1} + q \frac{\Delta t}{C_s} S_{SN}^{SN}(n-1) \lambda \zeta_n + \omega_n \frac{\Delta t}{C_s} \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} S_{SR}^{SK} r(k-1) \lambda \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\Delta t}{C_s} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} p_{ci} \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} S_{SC}^{SK}(k-1) \lambda + q \frac{\Delta t}{C_r} S_{SN}^{SN}(n-1) \lambda + \frac{\Delta t}{C_s} S - 1 \right] \gamma_n - \frac{\Delta t}{C_s} R' \gamma_n \right] \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \text{ 方向 } \gamma_{n+1} &= \frac{\Delta t}{C_r} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} \left\{ S_{SC}^{SK}(k-1) \lambda - (1-H_{ij}) p_{ei}(i-1) \lambda \right\} \zeta_{n+1} + q \frac{\Delta t}{C_r} S_{SN}^{SN}(n-1) \lambda \zeta_n - \omega_n \frac{\Delta t}{C_r} \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} S_{SR}^{SK} S(k-1) \lambda \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\Delta t}{C_r} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{n-1} p_{ci} \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{r=1}^{m+1} S_{SC}^{SK}(k-1) \lambda + q \frac{\Delta t}{C_r} S_{SN}^{SN}(n-1) \lambda + \frac{\Delta t}{C_r} R - 1 \right] \gamma_n - \frac{\Delta t}{C_r} S' \gamma_n \right] \quad (23) \end{aligned}$$

式中 $H_{ij} = \begin{cases} 0; & 0 \leq i \leq r_j \\ 1; & r_j < i \leq n \end{cases}$, $S = 2pe \{ S_{(3)} r_{(3)} + S_{(6)} r_{(6)} + S_{(9)} r_{(9)} \}$, $S' = 2pe \{ S_{(4)} r_{(4)} + S_{(7)} r_{(7)} + S_{(8)} r_{(8)} + S_{(9)} r_{(9)} \}$
 $R = 2pe \{ r_{(4)}^2 + r_{(7)}^2 + r_{(8)}^2 + r_{(9)}^2 \}$, $R' = 2pe \{ S_{(3)} r_{(3)} + S_{(6)} r_{(6)} + S_{(8)} r_{(8)} + S_{(9)} r_{(9)} \}$; (13) (14) の γ_s, γ_r の係数である。

6) 計算例: 9 本柱, 39 自由度系として行った解析結果を示す。

モデル諸元: 図-6に示す。なお海底地盤の性質はバネ係数の比によって表わした。柱の $EI = 1.29154 \times 10^{16} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$, 土のポアソン比 $\nu = 0.25$
 土のヤング率 $E = 4.5 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$

バネ係数: $p_{e1} = p_{e1} = p_{e1} = 2376038 \times 10^7 \text{ kg/cm}$ $p_{e2} = p_{e2} = p_{e2} = 1.101563 \times 10^7$
 $p_{e1} = p_{e1} = p_{e1} = 1.5 \times$ $p_{e2} = p_{e2} = p_{e2} = 1.5 \times$
 $p_{e1} = p_{e1} = p_{e1} = 2.0 \times$ $p_{e2} = p_{e2} = p_{e2} = 2.0 \times$

質量 m_i : 質量は各柱とも一定である。

$m_1 = 1.255666 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}$, $m_2 = 1.330825 \times 10^4$, $m_3 = 1.1793417 \times 10^5$

地震波: 作用方向は図-6に示す。作用地震波は ELCENTRO-NS 300 gal, 作用時間 6 sec, 時間間隔 $\Delta t = 1/200 \text{ sec}$ 減衰率 $\nu = 0.05$

7) 計算結果 電算結果の応答変位を図-7に示す。

8) 考察 ねじれ振動を考慮した場合としない場合を比較してみ3と変位量, 周期等には大きな差はなく, ねじれ角も本例に關しては小さかった。引き続き地震方向を変え, 自由度を上げて検討中である。

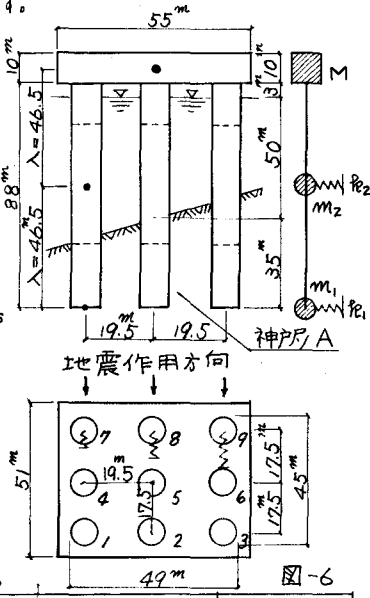
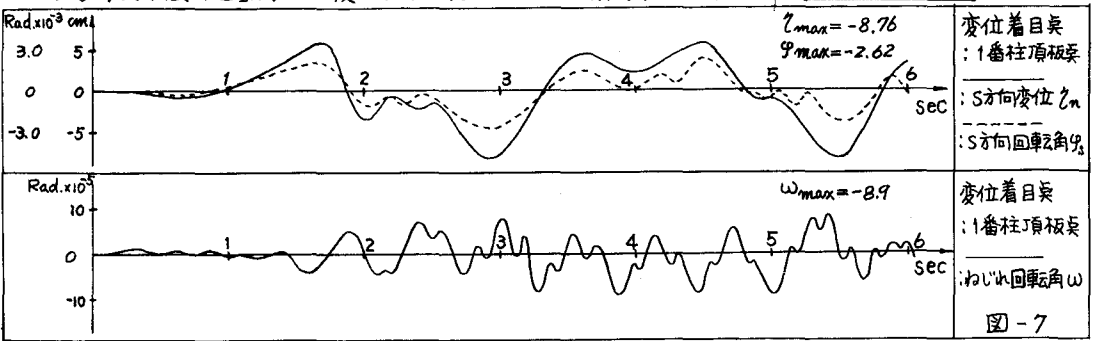


図-6



変位着目点: 1番柱頂板裏
 S方向変位 γ_n
 S方向回転角 γ_s
 変位着目点: 1番柱頂板裏
 ねじれ回転角 ω
 図-7