応力波伝播問題の差分解法について

京都大学工学部 正員 丹羽義次
京都大学工学部 正員 小林昭一
愛知県 正員○本守真人
京都大学大学院 学生員 横田和男

§まえがき

応力波伝播に関する研究は古くから数多くの研究者によって，理論及び実験の両分野で盛におこなわれてきた。応力波伝播を理論的に取り扱うことは，双曲型の線型２階偏微分方程式を解くことにほかならず，厳密解の求まっているのは簡単な境界条件の場合だけである。一方，工学上の問題としては，トンネル，暗きょなどの地下構造物に地震波が入射した時の構造物の挙動など，応力波伝播に関する問題が多く残っているにもかかわらず，その複雑な境界条件のため，厳密解はほとんど求まっていない。近年偏微分方程式の直接的な近似解法として差分方程式による解法が注目をあびている。差分法の考え方は，微分商を差分商におきかえる，という素朴な着想によるもので，近似解法としてもっとも原始的なものの一つである。しかしながら，実際の計算には手間がかかり，よい近似を得ようとするとたちまち多大の計算量が要求されることになり，以前はほとんど用いられていなかったが，最近の高速電子計算機の発達と共に，広く用いられるようになり，その理論的研究も盛んにおこなわれている。ここでは，応力波伝播の問題に差分解法を適用した。

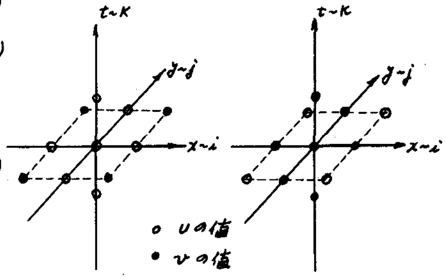
§差分方程式

平面歪で物体力の作用しない２次元問題の場合，一様な連続体の変位に関する運動方程式は $\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot u+\mu\nabla^2 u$ ----(1) ここで u は変位ベクトル，∇ はラプラスの演算子，λ，μ はLameの定数である。

微分商を中央差分で正確度が２であるような差分商におきかえると(1)式は次の様になる。

$$U_{i,j,k+1}-2U_{i,j,k}+U_{i,j,k-1}=C_1^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(U_{i+1,j,k}-2U_{i,j,k}+U_{i-1,j,k})$$
$$+(C_1^2-C_2^2)\frac{\Delta t^2}{4\Delta x\Delta y}(V_{i+1,j+1,k}-V_{i-1,j+1,k}+V_{i-1,j-1,k}-V_{i-1,j+1,k})$$
$$+C_2^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2(U_{i,j+1,k}-2U_{i,j,k}+U_{i,j-1,k})$$

$$V_{i,j,k+1}-2V_{i,j,k}+V_{i,j,k-1}=C_1^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2(V_{i,j+1,k}-2V_{i,j,k}+V_{i,j-1,k})$$
$$+(C_1^2-C_2^2)\frac{\Delta t^2}{4\Delta x\Delta y}(U_{i+1,j+1,k}-U_{i-1,j+1,k}+U_{i-1,j-1,k}-U_{i-1,j+1,k})$$
$$+C_2^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(V_{i+1,j,k}-2V_{i,j,k}+V_{i-1,j,k}) \quad \cdots\cdots (2)$$



$U_{i,j,k+1}$の計算　　$V_{i,j,k+1}$の計算

ここで Δt，Δx，Δy はそれぞれ t，x，y 軸方向の増分，C_1，C_2 はそれぞれたて波，横波の速さ，$U_{i,j,k}$ は $k\Delta t$ 時間の点 $(i\Delta x, j\Delta y)$ の x 方向の変位，$V_{i,j,k}$ は同様の y 方向の変位である。

§差分方程式の収束性，安定性

差分方程式の解が，もとの微分方程式の解に収束するかどうか，といった差分方程式の収束性や安定性については，近年多くの研究がなされている。特にここで取り扱った

双曲型の偏微分方程式を解く問題は初期値問題といわれ，初期値問題を差分式を用いて解く場合，差分方程式の安定性は時間軸の増分と空間軸の増分の比に本質的に影響され，その比によっては，解は振動したり，発散したりすることが知られている。初期値問題の安定性についての議論は，1930年以降 Courant, Friedrichs, Lewy や von Neuman や Kreiss や Buchaman や Lax, Richtmyer などによって広く研究されてきた。ここでは Lax, Richtmyer の理論を適用し，それに基いて，先に求めた差分方程式について安定性の計算をおこなった。この結果，$\Delta x = \Delta y$ とすれば $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < \frac{1}{2(C_1^2+C_2^2)}$ の場合(2)の差分式は安定である。

§ 数値計算例

以上述べて来た差分方程式(2)を用いて，無限に続く弾性体内に正方形のかたちをした空洞があり，それに調和関数の平面波が，空洞の面に直角に入射した場合の，空洞周辺の応力状態を求めた。

§ あとがき

上の例に見られるように，応力波伝播の問題を解くにあたって，差分解法はかなり有効な手段である。しかしながら現在の差分解法には，まだいろいろ欠点があり，それを列記すると次のようなものがある。一例を下図に示す。

(1) 境界条件としては，矩形の格子に一致した場合しか取り扱えず，任意の曲線の境界に対しては，有効な境界条件の置き換え方法がない。

(2) 初期条件や境界条件としては，連続で十分なめらかであることが必要で，不連続な場合その不連続性は差分解法ではとらえることができない。

(3) 定数係数の線型偏微分方程式に関しては，安定性の理論はかなりよくまとまっているが，変数係数や非線型の場合には，よく知られていない。

(4) 現在の計算機の能力としては，3つの独立変数を取り扱うのがせいいっぱいである。

240μ sec における空洞周辺の応力状態

$E = 32000\ kg/cm^2$ $\nu = 0.36$ $\rho = 1.27\ g/cm^3$