有限要素法の粘弾性体への適用

大阪府　正員　○藤田健二
神戸大　正員　　桜井春輔

1. はしがき

岩石やコンクリートの力学的性質は非常に複雑であり，弾性，塑性の他に粘性を示すことが明らかにされている。したがってここでは岩盤やコンクリート構造物の解析を対象として粘弾性体に対する有限要素法のプログラム開発を第一の目的とし (a) ポアソン比 ν は一定とし，ヤング係数 E が時間に対して変化する場合，(b) 偏差歪みと体積歪みとは互に独立であると仮定して，せん断弾性係数 G と体積弾性係数 K が変化する場合，について検討を行なう。

2. 数値解析法

第1段階 ： 外荷重に対して弾性解を求める。($t=0$)

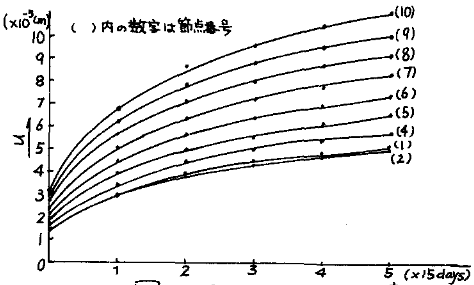
第2段階 ： 弾性解として求まった応力 $\Delta\{\sigma\}_0$ を使用して次式によりクリープ歪みの増分 $\Delta\{\varepsilon_c\}_1$ を計算する。$\{\varepsilon_c\} = [D_0]^{-1}\int_0^t C(t-\tau)\,\partial\{\sigma\}/\partial\tau \cdot d\tau$ ，ここに C はクリープ関数，$[D_0]^{-1}$ は ν のみからなるマトリックス。増分の形で考えれば次のようになる。

$$\Delta\{\varepsilon_c\}_n = [D_0]^{-1}\sum_{m=0}^{m=n}\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_{\substack{t=n\Delta t\\ \tau=m\Delta t}}\Delta\{\sigma\}_n\cdot\Delta t$$

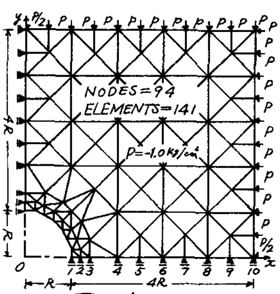
ここで Δt は時間々隔である。このクリープ歪み増分を初期歪みと考え，それより生ずる等価節点力を荷重として節点における釣合方程式を解き，応力成分を算定する。以下第2段階の計算法をくり返し，所定の時間における応力，変位を解析する。

3. E と ν の表示による場合の結果

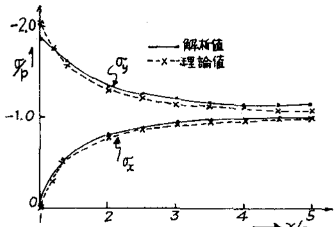
解析モデルは図－1であり，$E=3\times10^5\ \mathrm{kg/cm^2}$，$\nu=0.17$ かつ平面応力状態を考慮する。クリープ曲線の勾配は表－1に示す。得られた結果として図－2には節点変位－時間曲線を，また図－3に弾性解の理論値との比較を，さらに図-4



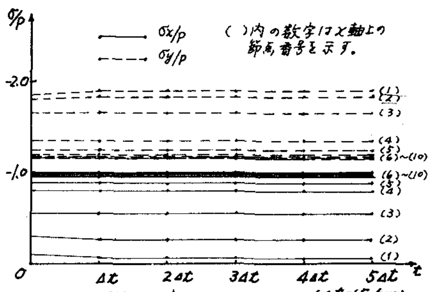
図－2



図－1



図－3　x軸上の節点応力



図－4

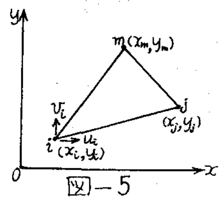
には各節点での応力−時間曲線を示してある。

表−1 クリープ曲線の勾配 (Δt=15days)

勾配 \ t	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$
$\frac{\partial c}{\partial t}$	0.267×10^{-6}	0.133×10^{-6}	0.067×10^{-6}	0.067×10^{-6}	0.047×10^{-6}

4. GとKとの表示による場合

図−5に示す三角形要素に対して二次元平面歪み状態を考慮して剛性マトリックスおよび等価節点力を誘導する。記号 u, v：それぞれx方向およびy方向の変位，$\alpha_1 \sim \alpha_6$：定数，$\{e\}$：偏差歪み，$\{S\}$：偏差応力，$\{e_o\}$：クリープ偏差歪み，$\{p\}$：静水圧応力，ϵ：全体積歪み，ϵ_o：クリープ体積歪み，$\{F\}^e$：各要素の節点力，$[A]$：変位関数の係数行列（線型関数），$\{\bar{u}\}$：仮想変位．



図−5

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{u\} \tag{1}$$

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_6 \\ -\frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{Bmatrix} = [B]\{\alpha\} = [B][A]^{-1}\{u\} \tag{2}$$

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} (\{e\} - \{e_o\}) = [D](\{e\} - \{e_o\}) = [D][B][A]^{-1}\{u\} - [D]\{e_o\} \tag{3}$$

Boltzmannの重畳原理により $\{e_o\} = f(t)\{S\}$ ，ここに $f(t)$ は時間 t の関数． (4)

一方，
$$\{p^*\} = \begin{Bmatrix} p/3 \\ p/3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & 0 & 0 \\ 0 & 3K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \epsilon/3 \\ \epsilon/3 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \epsilon_o/3 \\ \epsilon_o/3 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = [K'](\{\epsilon^*\} - \{\epsilon_o^*\}) \tag{5}$$

また(4)と同様に　$\epsilon_o^* = g(t)\,p/3$　ここに $g(t)$ は時間 t の関数 (6)

また，
$$\{\epsilon^*\} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha\} = [X][A]^{-1}\{u\} \tag{7}$$

(7)を(5)に代入して
$$\{p^*\} = [K'][X][A]^{-1}\{u\} - [K']\{\epsilon_o^*\} \tag{8}$$

ここで剛性マトリックスを誘導するのに仮想仕事の原理を用いると，外力 $\{F\}^e$ による仕事 W_E は，
$$W_E = \{\bar{u}\}^T\{F\}^e \tag{9}$$

一方，内部の仮想仕事 W_I は，
$$W_I = \int_V \{\bar{\epsilon}\}^T\{\sigma\}\,dV = \int_V \{\bar{e}\}^T\{S\}\,dV + \int_V \{\bar{\epsilon}^*\}^T\{p^*\}\,dV + \int_V \{\bar{\epsilon}^*\}^T\{S\}\,dV + \int_V \{\bar{e}\}^T\{p^*\}\,dV \tag{10}$$

式(10)に(3),(5),(7)を適用し，$W_E = W_I$ とおくと次式を得る．
$$\{F\}^e = [K]^e\{u\} - \{F\}^e_{e_o} - \{F\}^e_{\epsilon_o} \tag{11}$$

ここに $[K]^e$ は三角形要素の剛性マトリックスであり，次式で与えられる．
$$[K]^e = \int_V \left([[B][A]^{-1}]^T[D][B][A]^{-1} + [[X][A]^{-1}]^T[K'][X][A]^{-1} + [[X][A]^{-1}]^T[D][B][A]^{-1} + [[B][A]^{-1}]^T[K'][X][A]^{-1} \right) dV \tag{12}$$

また $\{F\}^e_{e_o}$ ，$\{F\}^e_{\epsilon_o}$ はそれぞれクリープ偏差歪み，クリープ体積歪みに対して生ずる等価節点力である．
$$\{F\}^e_{e_o} = \int_V \{[[B][A]^{-1}]^T[D] + [[X][A]^{-1}]^T[D]\}\{e_o\}\,dV \tag{13}$$

$$\{F\}^e_{\epsilon_o} = \int_V \{[[X][A]^{-1}]^T[K'] + [[B][A]^{-1}]^T[K']\}\{\epsilon_o^*\}\,dV \tag{14}$$

なお，この方法によって 3. に示したモデルの解析をプログラム開発をかねて行なっている。その結果は当日に発表予定である。