カップル・ストレスの応力集中に及ぼす影響について

京都大学　正員　小林 昭一

1. はじめに

材料強度に関して数多くの研究が行なわれ，精密な測定が行なわれるにつれて，弾性理論で求めた強度とはかなり異なった値で破壊したり降伏が生じたりする現象にしばしばそうぐうし，古典弾性理論では必ずしも満足な説明ができない場合のあることが次第に判明して来た。このような古典弾性論との不一致をより良く説明するために，ミクロな立場から結晶粒径をも考慮に入れて非均質材料と考えるアプローチ，あるいはマクロな立場からではあるが非均質材料を平均化して連続等質材料と考えるが同時に応力(歪)勾配などを考慮したアプローチなどが試みられている。

高次の項を無視すれば，歪勾配は曲率に比例し，一方曲率はカップルストレス(単位面積当りに作用する偶力)に比例するので，歪勾配を考慮することはカップルストレスを導入することになる。

歪と応力との比を弾性係数と定めたのと同様に曲率とカップルストレスとの比を一つの弾性定数(曲げ弾性係数)として選ぶと，これと剪断弾性係数との比($=\ell^2$)は長さの2乗のディメンジョンとなる。この比 ℓ は，材料のカップルストレス効果を表わしている材料定数であり，一般に多結晶材料や粒状集合体ではその値は大きいといわれている。従って材料によれば ℓ の値は初期欠陥やノッチ等の大きさと同程度になることも考えられる。従って破壊を対象とするような場合にはカップル・ストレスの影響は無視できないものとなろう。

応力集中に及ぼすカップル・ストレスの影響の大きいことは，図-1, 2 を見れば容易に理解されよう。例えば，一様引張応力場内の円形空洞まわりの最大応力集中係数は古典弾性学では周知のように3であるが，カップルストレス理論ではこの値は材料定数 ℓ およびポッソン比の関数となり，$a/\ell=3$ (a:空洞半径) の場合には $\nu=0.5$, 0 に対しそれぞれ 2.8，および 2.4 程度まで減少する。逆に円形剛体が含まれている場合には，$\nu=0.5$ とすれば，古典弾性論による 1.5 が，$a/\ell=3$ で約 2.4 程度に増加するなど大きな影響の現われていることが認められる。

以下 *Mindlin* の方法に沿ってカップルストレス理論を概観し，楕円孔周辺の応力集中問題に適用する。

2. 基礎方程式

平面歪状態にある等方弾性体を対象として，カップル・ストレスを考慮した基礎方程式を書き下すと以下のようになる。

(i) 歪，回軸，曲率と変位との関係

$$d_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(u_{\alpha/\beta}+u_{\beta/\alpha}),\quad \omega=\frac{1}{2}(u_{\beta/\alpha}-u_{\alpha/\beta}),\quad \kappa_\alpha=\omega_{/\alpha}$$

ここに，u_α, $d_{\alpha\beta}$, ω, κ_α はそれぞれ変位，歪，回転および曲率を表わし，$u_{\alpha/\beta}$ 等は

曲線座標 x^β による変位 u_α の共変微分を表わすものとする。

(ii) 釣合式

$$\tau^{\beta\alpha}/_\beta = 0 \quad , \quad m^\alpha/_\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta} = 0$$

ここに，$\tau^{\alpha\beta}$，m^α は Cauchy 応力，カップル・ストレスを，また $\varepsilon^{\alpha\beta}$ はパミュテーションテンソルを表わす。

(iii) 構成方程式

等方弾性体では次の関係が成立する。

$$\tau^{(\alpha\beta)} = G\left[(u^\alpha/^\beta + u^\beta/^\alpha) + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{\alpha\beta} u^\gamma/_\gamma\right] \quad , \quad m^\alpha = 4Gl^2 k^\alpha = 4Gl^2 \omega/^\alpha$$

ここに G，ν，l はそれぞれ剪断弾性係数，ポアソン比および材料定数を，また $g^{\alpha\beta}$ は基本計量テンソルを表わしている。上式は書き改めると，

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}\left[\tau_{(\alpha\beta)} - \nu g_{\alpha\beta}\tau^\gamma_\gamma\right] \quad , \quad k_\alpha = \frac{1}{4Gl^2} m_\alpha .$$

なお，釣合式を変位で表わすと

$$\nabla^2 u^\alpha + \frac{1}{1-2\nu} u^\beta/^\alpha_\beta + l^2 \varepsilon^{\alpha\delta}\varepsilon_{\beta\gamma}\nabla^2 u^\beta/^\gamma_\delta = 0 \quad , \quad \nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\, g^{kl}\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\right) , \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} .$$

$\tau^{(\alpha\beta)}$ は対称項を表わす。

(iv) 適合条件式

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\delta\gamma} d_{\beta\gamma}/_{\alpha\delta} = 0 \quad , \quad \varepsilon^{\alpha\beta} k_\alpha/_\beta = 0 .$$

応力の形で表わすと

$$\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}\tau_{(\alpha\beta)}/_{\gamma\delta} - \nu\nabla^2\tau^\gamma_\gamma = 0 \quad , \quad \varepsilon^{\alpha\beta} m_\alpha/_\beta = 0 \quad , \quad m_\alpha = \varepsilon^{\beta\gamma}\tau_{(\alpha\gamma)}/_\beta + \nu\varepsilon_{\alpha\beta}\tau^\delta_\delta/^\beta .$$

このうちの2つが独立である。

(v) 応力関数

応力が次のように応力関数 ϕ，ψ により表わされるものとする。

$$\tau^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}\phi/_{\gamma\delta} + \varepsilon^{\gamma\alpha}\psi/^\beta_\gamma \quad , \quad m_\alpha = \psi/_\alpha .$$

釣合式および適合条件式を満足するためには，ϕ，ψ は次式を満足しなければならない。

$$\nabla^4\phi = 0 \quad , \quad (l^2\nabla^2 - 1)\nabla^2\psi = 0 \quad , \quad (l^2\psi - \psi)/_\alpha = 2(1-\nu)l^2\varepsilon_{\alpha\beta}\nabla^2\phi/^\beta .$$

従って，カップル・ストレス問題の解は与えられた境界条件の下で上式を解くことに帰される。具体的な例は当日発表する予定である。

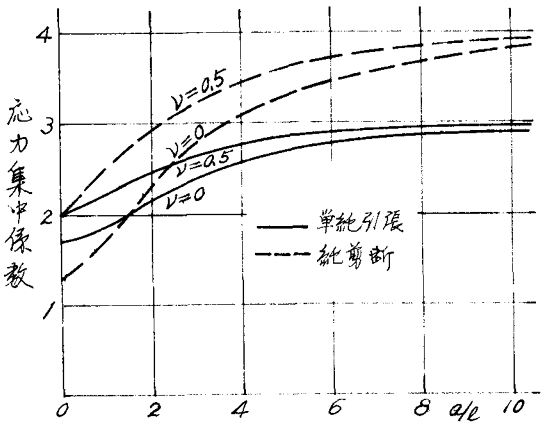

図-1 円孔(半径a)まわりの応力集中 (R.D.Mindlin)

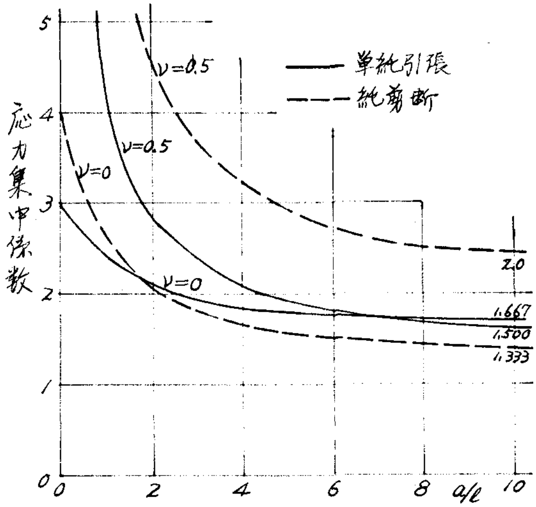

図-2 円形剛体(半径a)まわりの応力集中 (G.C.Sih et al)