変形を考慮した2ヒンジアーチの塑性解析について

大阪大学工学部 正員 前田 幸雄
大阪大学工学部研究生○学生員 藤本 一男

1．まえがき

アーチの塑性解析において、軸方向力と曲げモーメントを同時に考慮した降伏条件式と単純塑性理論による上界定理を用いることにより、崩壊荷重の算定はできる。しかし、荷重の増加に伴ない塑性ヒンジが形成されれば、変形は急に大きくなり崩壊時には変形の影響を無視し得ないであろう。この変形の影響を考慮した崩壊荷重の算定法を示した。

2．2ヒンジアーチの変位

一般に2ヒンジアーチの任意点の任意方向変位δは、せん断力の影響を無視すると、

$\delta = \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds$ ----------(1) によって表わすことができる。ここで、M，N＝それぞれ作用モーメントおよび作用軸方向力、$\bar{M}$，$\bar{N}$＝それぞれ静定基本形の曲げモーメントおよび軸方向力、EI＝曲げ剛性，EA＝伸び剛性。また、積分は軸線に沿って行う。

弾性域および塑性域の変位は次のように3段階に分けて考えることにより算定できる。(i)．弾性範囲，(ii)．第1塑性ヒンジ形成時，(iii)．第2塑性ヒンジ形成時。そこで、静定基本形として、第1塑性ヒンジ形成点で完全ヒンジを持つ3ヒンジアーチと考えることにより、それぞれの段階の変位は(1)式を積分することにより、次式のように表わされる。

$\delta = \{ g_1\alpha + g_2\alpha\beta + g_3\alpha\bar{H} + g_4\alpha\beta\bar{H} \} l$ ------(2)。 ここで，l＝スパン長，g＝アーチの形状，断面形状，載荷条件，求める変位の位置による関数，α＝無次元化した荷重強度，$\alpha\beta$＝無次元化した水平反力（β＝水平反力係数と呼ぶ。），$\bar{H}$＝静定基本形の水平反力，を表わす。そこで、弾性範囲では、(2)式の第3，第4項の和が0であるとして（静定基本形として一端ローラーのアーチとする。） 水平反力係数$\beta = -\frac{g_3}{g_4}$ ------(3) を求めて変位は得られる。第1塑性ヒンジ形成時では第1塑性ヒンジ形成点で降伏条件式を満足する摩擦ヒンジを持つアーチとして変位は得られる。第2塑性ヒンジ形成時では、第1，第2塑性ヒンジ形成点でそれぞれ降伏条件式を満足するようなα，βによって変位は得られる。

3．変形を考慮した塑性崩壊荷重

変形を考慮した崩壊荷重は、単純塑性理論によって得られる塑性ヒンジ発生点の位置の変位を考えることによって求めることができる。2つの塑性ヒンジ点での降伏条件式は，それぞれ $k_1 m_1^i + k_2 n_1^j = k_3$ ----------(4)， $k_1' m_2^{i'} + k_2' n_2^{j'} = k_3'$ ----------------(5)

で表わされる。ここで，k_1，k_2，k_3，i，j＝断面形状、内力の符号によって決まる定数 $m = \frac{M}{M_P}$ ，$n = \frac{N}{N_P}$ M，N＝それぞれ作用曲げモーメントおよび軸方向力，M_P，N_P＝それぞれ降伏モーメントおよび降伏軸方向力，を表わす。

また、塑性ヒンジ点における曲げモーメントおよび軸方向力の無次元量はその点の変位を考慮して

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= g_1(\xi_1 - u_1, \eta_1 - v_1, \alpha, \beta), \quad n_1 = g_1'(\xi_1 - u_1, \eta_1 - v_1, \alpha, \beta) \end{aligned}\right\} \text{--------(6)}$$

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= g_2(\xi_2 - u_2, \eta_2 - v_2, \alpha, \beta), \quad n_2 = g_2'(\xi_2 - u_2, \eta_2 - v_2, \alpha, \beta) \end{aligned}\right\} \text{-------(7)}$$

によって表わすことができる。ここでξ，η＝それぞれ塑性ヒンジ点の座標，u，v＝そ

れぞれ塑性ヒンジ点における水平および垂直変位，g = 載荷条件，アーチの形状による関数を表わす。

1) 第1塑性ヒンジ形成時の荷重と変位

第1塑性ヒンジが1点（添字の1）に生じるとする。まず，変位が弾性範囲にあるとして，(3)式より β を求めてそれぞれの変位を α によって表わすと，$u_1 = e_1\alpha$，$v_1 = e_2\alpha$ } (8)
(8)式を(6)式に代入し，さらに降伏条件式(4)式に代入すると ${}_1\alpha_1$ が求まる。これを ${}_1\alpha$ の第1近似値として，(8)式より変位の第1近似値，${}_1u_1$，${}_1v_1$ が得られる。この変位を(6)式に代入して m_1 の第1近似値 ${}_1m_1$ を求める。次に ${}_1u_1$，${}_1v_1$ を(6)式に代入し未知量を α，β として降伏条件式(4)式と $m_1(\alpha,\beta) = {}_1m_1$ とすることにより ${}_2\alpha$，${}_2\beta$ なる第2近似値を得る。この手法をくり返すことによって一定値に収束する荷重と変位が得られる。同じ方法を2点において行ない小さい方の荷重を与える点で塑性ヒンジが発生し，その収束値が第1塑性ヒンジ形成時の荷重と変位である。すなわち，一つの塑性ヒンジ点で降伏条件式を満足するような荷重と変位の平衡状態を求め，この時の荷重と変位が第1塑性ヒンジ形成時の荷重と変位である。

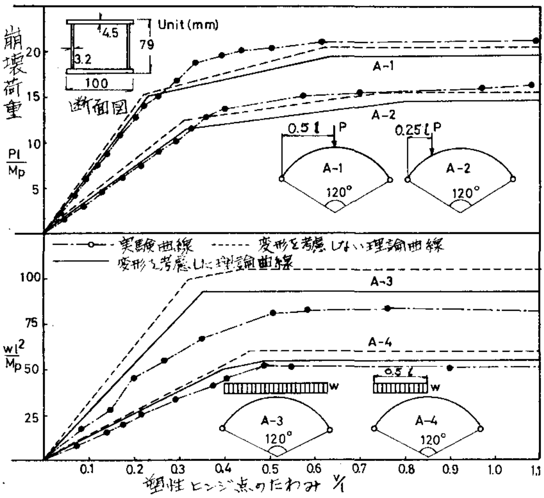
2) 第2塑性ヒンジ形成時の荷重と変位

まず，変形を無視して（(6)，(7)式で u，$v = 0$ とする。）(6)，(7)式と(4)，(5)式から未知量 ${}_1\alpha_u$，${}_1\beta_u$ を求める。これは下界定理による方法で上界定理によって得られる値と一致する。

この ${}_1\alpha_u$，${}_1\beta_u$ を第1近似値として(2)式より変位の第1近似値を求め(6)，(7)式に代入して，それぞれの降伏条件式を満足させると第2近似値 ${}_2\alpha_u$，${}_2\beta_u$ が得られる。この方法をくり返すことによって一定値に収束する荷重と変位が得られる。すなわち，2つの塑性ヒンジ点でそれぞれの降伏条件式を満足するような荷重と変位の平衡状態を求め，その時の荷重と変位が，変形を考慮した崩壊荷重と変位である。

4. 実験結果と理論値の比較検討

図に示すように箱形断面の2ヒンジ円弧アーチ（材質 SS-41，スパン4m）の塑性崩壊実験を行った。この結果を要約すると



i). 集中荷重の場合(A-1, A-2)，ひずみ硬化の影響が現われたため実験値は大きくなった。変形による崩壊荷重の低下は理論的には約5%であり比較的少ない。

ii). 全載等分布荷重(A-3)の場合，理論的にも最も変形による低下が大きく約15%である。さらに実験値が低下しているのは等分布荷重を集中荷重（10等分）におき換えた際，荷重が均一にならなかったことと，降伏領域の広がりが大きくなるためと思われる。

iii). 半載等分布荷重(A-4)の場合，理論的には変形により約10%の低下がある。理論値とよく一致している。以上の結果単純塑性理論による崩壊荷重はひずみ硬化の影響が期待できない時，また載荷条件によっては，変形の影響を検討しなければならないであろう。