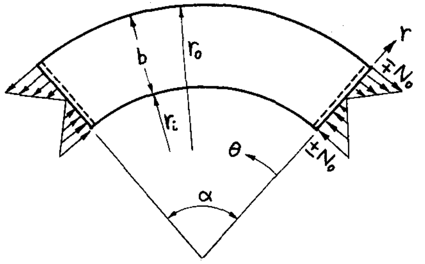
扇形板の曲げ座屈

関西大学工学部　正会員　米沢　博
〃　〃　○三上　市蔵
〃　〃　赤松　洋一

1. まえがき　極異方性扇形板の曲げ座屈に関する研究は見当たらないようである。ここでは直線辺が単純支持され，曲線辺が種々の支持条件をもつ極異方性扇形板の曲げ座屈を理論的に解析した。

2. 極異方性扇形板の微分方程式の解　図－1に示すような純曲げを受ける極異方性扇形板が座屈したときのたわみ曲面の微分方程式はつぎのようになる。[1)]

$$D_r\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+2\frac{\partial^3 w}{r\partial r^3}\right)+2H\left(\frac{\partial^4 w}{r^2\partial r^2\partial\theta^2}-\frac{\partial^3 w}{r^3\partial r\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 w}{r^4\partial\theta^2}\right)$$
$$+D_\theta\left(-\frac{\partial^2 w}{r^2\partial r^2}+\frac{\partial w}{r^3\partial r}+2\frac{\partial^2 w}{r^4\partial\theta^2}+\frac{\partial^4 w}{r^4\partial\theta^4}\right)$$
$$=\pm N_0\left(1-2\frac{r-r_i}{r_0-r_i}\right)\left(\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}\right) \qquad (1)$$



図－1

ここに，$H=k\sqrt{D_r D_\theta}$，D_r・D_θ は半径方向および接線方向の曲げ剛さで，右辺の複号は $r=r_i$ で引張のとき＋，$r=r_0$ で引張のとき－をとる。

式（1）の解を

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}R(r)\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha},\quad r=r_0\zeta \qquad (2)$$

と仮定し，式（1）に代入するとつぎのようになる。

$$\zeta^4\frac{d^4R}{d\zeta^4}+2\zeta^3\frac{d^3R}{d\zeta^3}-\gamma\zeta^2\frac{d^2R}{d\zeta^2}+\left[\gamma\zeta\mp\frac{\mu}{\psi}\left(\zeta^3-\beta\zeta^4\right)\right]\frac{dR}{d\zeta}+\left[-\delta\pm\mu\left(\zeta^2-\beta\zeta^3\right)\right]R=0 \qquad (3)$$

ただし，$\rho=r_i/r_0$，　$\gamma=2k\psi\sqrt{D_\theta/D_r}+D_\theta/D_r$，　$\delta=\gamma-(D_\theta/D_r)(1-\psi)^2$，　$\psi=(m\pi/\alpha)^2$，$\mu=(N_0 r_0^2/D_r)\psi(1+\rho)/(1-\rho)$，　$\beta=2/(1+\rho)$ である。

式(3)の解を $R=\sum_{i=0}^{\infty}g_i\zeta^{i+\lambda}$ とおき，Frobeniusの方法で求めるとつぎのようになる。

$$R=A_1R_1+A_2R_2+A_3R_3+A_4R_4 \qquad (4)$$

ここに A_1～A_4 は境界条件で決定される積分定数で，R_1～R_4 は指数決定方程式の4根 $\lambda_{1,4}=1\pm\Omega_1$，$\lambda_{2,3}=1\pm\Omega_2$（$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3>\lambda_4$）を用いてつぎのように表わされる。ただし $\Omega_{1,2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(1+\gamma)\pm\sqrt{(1-\gamma)^2+4\delta}\right\}}$ である。

（1）4根の間の差がすべて整数でない場合

$$R_n=\sum_{i=0}^{\infty}\left[g_i\zeta^{i+\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_n}\quad(n=1,2,3,4) \qquad (5)$$

（2）4根の間の差のうち1つが整数となる場合　差が整数となる2根を λ_1,λ_2（$\lambda_1>\lambda_2$），他の2根を λ_3，λ_4 とすると，R_1，R_3，R_4 は式(5)で，R_2 は次式で与えられる。

$$R_2=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\zeta^{i+\lambda}\left(\dot{C}_i+C_i\log\zeta\right)\right]_{\lambda=\lambda_2}\quad(\text{ただし } k=\lambda_1-\lambda_2 \text{ とおく}) \qquad (6)$$

1) Yonezawa： Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges, Proc. ASCE, Vol.88, No. EM1, 1962, pp.1－21.

(3) 差が整数となる根の組合わせが2つある場合　　差が整数となる根の組合わせの１つをλ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$)とするとR_1は式(5)で，R_2は式(6)で与えられる。他の組合わせをλ_3，λ_4 ($\lambda_3 > \lambda_4$)とするとR_3は式(5)で与えられ，R_4は式(6)においてλ_1, λ_2の代わりにそれぞれλ_3, λ_4を用いればよい。

(4) ４根の間の差がすべて整数である場合　　R_1は式(5)で，R_2は式(6)で，R_3，R_4はつぎの式で与えられる。

$$R_3 = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\eta^{\lambda+i}\left\{\dot{e}_i + (e_i + \dot{d}_i)\log\eta + d_i(\log\eta)^2\right\}\right]_{\lambda=\lambda_3} \quad (\text{ただし } k=\lambda_2-\lambda_3,\ \ell=\lambda_1-\lambda_3 \text{ とおく}) \qquad (7)$$

$$R_4 = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\eta^{\lambda+i}\left\{\dot{z}_i + (\dot{h}_i + \dot{p}_i)\log\eta + (h_i + \dot{f}_i)(\log\eta)^2 + f_i(\log\eta)^3\right\}\right]_{\lambda=\lambda_4}$$

$$(\text{ただし } k=\lambda_3-\lambda_4,\ \ell=\lambda_2-\lambda_4,\ s=\lambda_1-\lambda_4 \text{ とおく}) \qquad (8)$$

ただし，$g_0 = 1$，$g_1 = 0$，$g_2 = \pm\mu\Lambda_0/G_2, \cdots, g_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}g_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}g_{i-3})$；

$\dot{g}_0 = \dot{g}_1 = 0$, $\dot{g}_2 = [\pm\mu/\psi - \dot{G}_2 g_2]/G_2, \cdots, \dot{g}_i = [\pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{g}_{i-2} + \frac{1}{\psi}g_{i-2} - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{g}_{i-3} + \frac{1}{\psi}g_{i-3})\} - \dot{G}_i g_i]/G_i$；

$i<k$ のとき　$c_i = 0$，　$\dot{c}_i = \dot{G}_k g_i$，

$i=k$ のとき　$c_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}g_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}g_{i-3})$，　$\dot{c}_i = \pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{g}_{i-2} + \frac{1}{\psi}g_{i-2} - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{g}_{i-3} + \frac{1}{\psi}g_{i-3})\}$，

$i>k$ のとき　$c_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}c_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}c_{i-3})/G_i$, $\dot{c}_i = [\pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{c}_{i-2} + \frac{1}{\psi}c_{i-2} - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{c}_{i-3} + \frac{1}{\psi}c_{i-3})\} - \dot{G}_i c_i]/G_i$；

$i<\ell$ のとき　$d_i = e_i = \dot{e}_i = 0$，　$\dot{d}_i = \dot{G}_\ell c_i$，

$i=\ell$ のとき　$d_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}c_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}c_{i-3})$, $\dot{d}_i = \pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{c}_{i-2} + \frac{1}{\psi}c_{i-2} - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{c}_{i-3} + \frac{1}{\psi}c_{i-3})\}$，　$e_i = -\dot{G}_\ell d_i$，

$\dot{e}_i = -\ddot{G}_\ell d_i$，

$i>\ell$ のとき　$d_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}d_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}d_{i-3})/G_i$，　$\dot{d}_i = [\pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{d}_{i-2} + \frac{1}{\psi}d_{i-2} - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{d}_{i-3} + \frac{1}{\psi}d_{i-3})\} - \dot{G}_i d_i]/G_i$，

$e_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}e_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}e_{i-3})/G_i$，

$\dot{e}_i = [\pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{e}_{i-2} + \frac{1}{\psi}(e_{i-2} + \dot{G}_\ell d_{i-2}) - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{e}_{i-3} + \frac{1}{\psi}(e_{i-3} + \dot{G}_\ell d_{i-3}))\} - \dot{G}_i(e_i + \dot{G}_\ell d_i)]/G_i$；

$i<s$ のとき　$f_i = h_i = \dot{h}_i = \dot{p}_i = \dot{z}_i = 0$；　$\dot{f}_i = \dot{G}_s d_i$，

$i=s$ のとき　$f_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}d_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}d_{i-3})$，　$\dot{f}_i = \pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{d}_{i-2} + \frac{1}{\psi}d_{i-2} - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{d}_{i-3} + \frac{1}{\psi}d_{i-3})\}$，$h_i = -\dot{G}_s f_i$，

$\dot{h}_i = -\ddot{G}_s f_i$，$\dot{p}_i = \dot{G}_s[\pm\mu\{\Lambda_{i-2}e_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}e_{i-3}\} - \dot{G}_\ell f_i]$，　$\dot{z}_i = -\dot{G}_s(\dot{p}_i + \ddot{G}_s f_i)$，

$i>s$ のとき　$f_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}f_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}f_{i-3})/G_i$，　$\dot{f}_i = [\pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{f}_{i-2} + \frac{1}{\psi}f_{i-2} - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{f}_{i-3} + \frac{1}{\psi}f_{i-3})\} - \dot{G}_i f_i]/G_i$，

$h_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}h_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}h_{i-3})/G_i$，　$\dot{p}_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}\dot{p}_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}\dot{p}_{i-3})/G_i$，　$\dot{z}_i = \pm\mu(\Lambda_{i-2}\dot{z}_{i-2} - \beta\Lambda_{i-3}\dot{z}_{i-3})/G_i$，

$\dot{h}_i = [\pm\mu\{\Lambda_{i-2}\dot{h}_{i-2} + \frac{1}{\psi}(h_{i-2} + \dot{G}_s f_{i-2}) - \beta(\Lambda_{i-3}\dot{h}_{i-3} + \frac{1}{\psi}(h_{i-3} + \dot{G}_s f_{i-3}))\} - \dot{G}_i(h_i + \dot{G}_s f_i)]/G_i$；

また　$\Lambda_i = (\lambda+i)/\psi - 1$；

$G_i = (\lambda+i)(\lambda+i-2)\{(\lambda+i-1)^2 - \gamma\} - \delta$，　$\dot{G}_i = 2(\lambda+i-1)\{(\lambda+i-1)^2 - \gamma + (\lambda+i)(\lambda+i-2)\}$，

$\ddot{G}_i = 10(\lambda+i-1)^2 + 2(\lambda+i)(\lambda+i-2) - 2\gamma$．

3. 座屈荷重方程式　　式(2)を式(4)～(8)とともに境界条件式に代入し，積分定数A_1～A_4の係数行列式を０とおけば座屈荷重方程式が得られる。たとえば曲線辺が固定されている場合で，指数決定方程式の４根の間の差がいずれも整数でない場合には座屈荷重方程式はつぎのようになる。

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{\infty}[g_i]_{\lambda=\lambda_1} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i]_{\lambda=\lambda_2} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i]_{\lambda=\lambda_3} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i]_{\lambda=\lambda_4} \\ \sum_{i=0}^{\infty}[g_i\rho^{i+\lambda}]_{\lambda=\lambda_1} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i\rho^{i+\lambda}]_{\lambda=\lambda_2} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i\rho^{i+\lambda}]_{\lambda=\lambda_3} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i\rho^{i+\lambda}]_{\lambda=\lambda_4} \\ \sum_{i=0}^{\infty}[g_i(i+\lambda)]_{\lambda=\lambda_1} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i(i+\lambda)]_{\lambda=\lambda_2} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i(i+\lambda)]_{\lambda=\lambda_3} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i(i+\lambda)]_{\lambda=\lambda_4} \\ \sum_{i=0}^{\infty}[g_i\rho^{i+\lambda}(i+\lambda)]_{\lambda=\lambda_1} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i\rho^{i+\lambda}(i+\lambda)]_{\lambda=\lambda_2} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i\rho^{i+\lambda}(i+\lambda)]_{\lambda=\lambda_3} & \sum_{i=0}^{\infty}[g_i\rho^{i+\lambda}(i+\lambda)]_{\lambda=\lambda_4} \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$