圧縮性流体としてみた交通流

京都大学　正　員　　佐佐木 綱
〃　　　学生員　○井上　矩之

1. まえがき

本研究の目的は、交通流と流体の流れとのアナロジーおよび交通流のもつ心理的側面の両者を考慮して，交通流の性格を解析することにある。

ここでは，心理的側面を表わす不満のエネルギーなる概念を定義し，これを用いて交通流にエネルギー式を導入し，これに連続の式，運動の式を加えた三つの基礎方程式を用いることにより、一様な道路における交通密度と速度との間の関係を求めてみる。

2. 交通流と圧縮性流体のアナロジー，不満のエネルギー

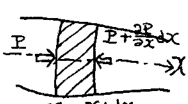
道路上の交通現象を説明するために、次のようなゴム風船モデルを考える。各車はそれぞれ自分の走りたい速度に応じた大きさのゴム風船の中に入っている。自車のゴム風船が前後車のゴム風船と接触しない状態にあれば自由走行が可能である。混雑してくると，おたがいに接触するようになり、ゴム風船の膜をとおして干渉作用をおよぼしあうようになる。さらに車の数が多くなるにつれて、この干渉作用は強くなり、各車のゴム風船は前後車のそれにより圧縮されてしだいに小さくなっていく。この干渉作用の力は、流体力学における圧力に対応するものと考えることができる。このように圧力をおよぼしあっている状態にあるとき、交通流は連続であるということにする。また，交通密度は圧力により変化するので、交通流は圧縮性であるといえる。交通流と流体の間には，このようなアナロジーがみられるので，交通流を圧縮性流体と仮定し，流体力学的な取り扱いを行なう。

他車から何の拘束も受けず自由に走行できるときに、高速性と安全性のバランスの上にたって各車ごとに決定される速度を希望速度 u_d と定義する。u_d に影響するファクターとしては、例えば車の流れでは，車の性能・運転車の個性・運転技術などの各車により異なる内的条件や、道路・路側・天候などの場所的、時間的に変動する外的条件が考えられる。

さて，単位質量（1台）あたりの不満のエネルギーを　$E = u_d^2/2 - u^2/2$ ---(1)
で定義する。u は実際の走行速度を表わす。各車は，自由走行時には $u_d^2/2$ なる運動エネルギーで走行できるのに，連続状態になると $u^2/2$ なる運動エネルギーでしか走行できない。その差が各車の内部に貯わえられ，これを心理面からみれば，u_d で走れないための不満を定量的に表わしているものと考えることができる。各車はこの E を小さくするように行動するであろうし，それを妨げるのが交通密度である。なお，この E は，流体力学における内部エネルギーに対応するものと考えることができる。

3. 交通流の基礎方程式

一次元，非定常の場合について，圧縮性流体と仮定した交通流が満たさねばならない、三つの基礎方程式について考察する。



(1)連続の式　道路上に交通流の流れの方向に x 軸をとり、座標 x と $x+dx$ の断面で囲まれた微小な面積を考える。この微小面積に質量保存の法則

を dt時間についてたてると　$\int_t^{t+dt}\{q(x,s)-q(x+dx,s)\}ds = \int_x^{x+dx}\{k(s,t+dt)-k(s,t)\}b(s)ds$　となる。
ここに、$q(x,t)$: 断面x, 時刻tにおける交通量　$q = bku$　[台/時, 人/時]

$k(x,t), u(x,t)$: 〃　交通密度 [台/km·車線, 人/m²], 速度 [km/時]

$b(x)$: 断面xの巾員 [m], あるいは車線数 [車線]

この式を変形すると　$\frac{\partial(bku)}{\partial x} + b\frac{\partial k}{\partial t} = 0$ ----(2)　となる。

(2)運動の式　時刻tに微小面積の中にある質量は　$\int_x^{x+dx} k(s,t)b(s)ds$　であり、この時刻における断面xの加速度は　$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}$　であるから、この微小面積に含まれる交通流についてたてた時刻tにおける運動方程式は　$\{\int_x^{x+dx}k(s,t)b(s)ds\}\cdot(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}) = -\frac{\partial P}{\partial x}dx$
となる。ここに、

$P(x,t)$: 断面x, 時刻tにおける力としての圧力 [台·m/sec², 人·m/sec²]　$P = pb$

$p(x,t)$: 〃　x軸に垂直方向単位長さあたりの圧力 [台/sec², 人/sec²]

この式を変形すると　$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{bk}\cdot\frac{\partial(pb)}{\partial x}$ --- (3)　となる。

(3)エネルギーの式　エネルギー保存の法則を交通流に適用する。流れの場における不満のエネルギーと仕事エネルギーの変換過程に対して、単位質量あたり、膨張による圧力のなす仕事が　$p\cdot d(\frac{1}{k})$, 膨張による不満のエネルギーの減少量が　$-dE$　であることから、

$-dE = p\,d(\frac{1}{k})$, すなわち　$p = k^2\frac{\partial E}{\partial k}$ ···· (4)　と定式化できる。

4. 一様な道路における交通流

bおよびu_dが一定と仮定できる道路を一様な道路と名づける。この場合には、(1)〜(4)式からE, pを消去して　$\frac{\partial(ku)}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial t}=0$,　$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x} = 2u\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial k}+k\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial k}+ku\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial k^2}$
が得られる。ここで、uはkの単調減少関数であると仮定すると、両式はそれぞれ

$(k\frac{du}{dk}+u)\frac{\partial k}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial t}=0$,　$-\{u\frac{du}{dk}+k(\frac{du}{dk})^2+ku\frac{d^2u}{dk^2}\}\frac{\partial k}{\partial x}+\frac{du}{dk}\cdot\frac{\partial k}{\partial t}=0$　と変形される。
この連立偏微分方程式が自明でない解をもつためには　$ku\frac{d^2u}{dk^2}+2k(\frac{du}{dk})^2+2u\frac{du}{dk}=0$
が成立せねばならない。この常微分方程式は容易に解けて　$u^3 = -c_1/k + c_2$　となる。
ここで、境界条件として、① $k=k_0$で$u=0$,
② $k=k_d$で$u=u_d$　を用いれば

$u/u_d = f(k)/f(k_d)$,　$f(k) = (\frac{1}{k} - \frac{1}{k_0})^{\frac{1}{3}}$ --(5)

が得られる。ここに、

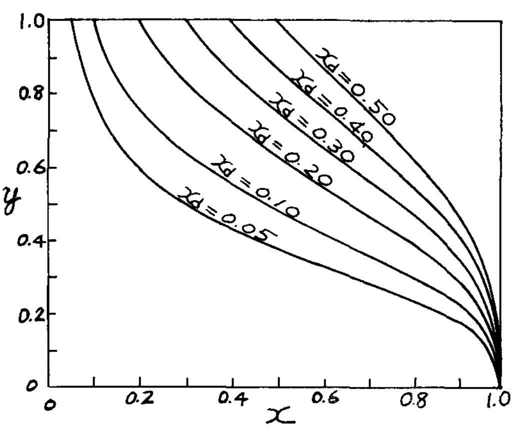
u_d: 希望速度,　k_0: 飽和交通密度

k_d: u_dで走行できる最大の交通密度

変換 $k/k_0 = x$, $u/u_d = y$, $k_d/k_0 = x_d$
($x_d \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$) を行なうと、(5)式は

$y^3 = \frac{x_d}{1-x_d}\cdot(\frac{1}{x} - 1)$ ···(6)　となる。

x_dをパラメータとしてこの関係を右図に示す。



5. あとがき

交通密度と速度の関係を流体モデルにより求めたが、今後は実測データによる実証をするとともに、さらに複雑な交通現象の定性的，定量的解析を進めていきたい。

<参考文献> Shih-I Pai : Introduction to the Theory of Compressible Flow