道路網の最大フローに関する一考察

大阪市立大学工学部　正員　○西村　昂
大阪市立大学大学院　学生員　中村正治

1、まえがき

ODパターンを持たないフローについて道路網の最大フロー（これは道路網の交通容量と考えられるが）については我々はさきに文献(1)で考察した。本報告ではODパターンを持ったフローに対する道路網の最大フローをとりあげてみたい。

2、ODパターン

ネットワークを$G(N,A)$で表わす。ここではNはノードの集合を表わし，Aはアークの集合を表わす。ノードxからyにいたるアークa_{xy}はそこに流しうるフローの上限すなわち容量C_{xy}をもつ。

ODパターンとはフローのかたよりを定量的に示したものと考えられるが，このようなODパターンをもつフローで，与えられたネットワークを流れうる最大のものを求めるのがここでの問題である。ODパターンは全交通量の和が1となるような単位OD表の形で与えるのが便利である。すなわち，

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \qquad (1)$$

であり，p_{ij}はゾーンiからゾーンjに行く確率と考えてもよい。また，ゾーンiから発生する全フロー，およびゾーンjに到着する全フローの確率はそれぞれ

$$\sum_j p_{ij} \quad , \quad \sum_i p_{ij} \qquad (2)$$

で表わされるから，ゾーンi，jでの発生量，集中量は，全交通量をTとすると，

$$\sum_j p_{ij}\cdot T \quad , \quad \sum_i p_{ij}\cdot T \qquad (3)$$

で表わされる。

3、最大フロー

$P=\{p_{ij}\}$なるODパターンをもつ最大フローは次のようにして求められる。

ステップ1.　すべてのアークに対して，

$$C_{xy} - \sum_{r_{ij} \ni a_{xy}} p_{ij}\cdot T \geq 0 \qquad (4)$$

を満たしながら，Tを最大にする。ここでr_{ij}はゾーンiからゾーンjにいたるフローの流れるルートを表わし，$r_{ij} \ni a_{xy}$はアークa_{xy}を含むルートr_{ij}を意味する。

ステップ2.　上で求めたTを(4)に代入し，左辺の値を新しいアーク容量とする。(これはTを流した後の残りの容量を表わしている)。上で求めたTの最大値を(4)に代入すると等号が成り立つアークが必ず1本は存在する。このアークの新しい容量は0となるからそれ以上フローは流れない。したがって容量が0となったアークはネットワークからとりはずす。

ステップ3. ネットワークが2つの部分に分割されたかどうかを調べる。もし分割されていれば，それ以上そのODパターンによるフローは流れないので計算は終了し，ステップ4に行く。そうでないときはステップ1に帰る。

ステップ4. 各回に得られた最大フローTを合計する。得られたものが求める最大フローで，とりはずされたアーク全体は1つのカットを構成し，そのODパターンに対する最小カットとなっている。

このアルゴリズムによって最大フローが求められることを説明しよう。図1において，このアルゴリズムによって得た最大フローをT_1とし，その時のカットをC_1とする。いま別の方法でT_1より大きいTがみつけられるものと仮定する。それをT_2で表わし，それに対応するカットをC_2とする。

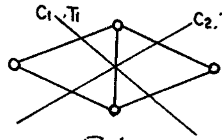

図.1

カットCの容量はカットを構成するアークの容量の合計であり，これを$\mathbb{C}$で表わす。またフローTのうちでカットCを横断する交通量を$C(T)$で表わすことにすれば，次の式が成り立つ。

フローT_1に対し： $C_1(T_1)=\mathbb{C}_1$, $C_2(T_1)\leqq\mathbb{C}_2$ (5)

フローT_2に対し： $C_1(T_2)\leqq\mathbb{C}_1$, $C_2(T_2)=\mathbb{C}_2$ (6)

(5)，(6)式により：

$$\left.\begin{array}{ll} C_1(T_2)\leqq C_1(T_1) & \therefore\ T_2\leqq T_1 \\ C_2(T_1)\leqq C_2(T_2) & \therefore\ T_2\geqq T_1 \end{array}\right\} \quad (7)$$

したがって(7)式により，$T_1=T_2$が導かれ，いかなる配分方法によっても同じ大きさのフローが得られることがわかる。　これをさらに別の方法で説明してみよう。任意の2点間の任意のルートを通るフローは，他の任意のルート上のフローに変換できる。このとき2つのルートのフローの差異は2つのルートがつくるループ上の循環フロー(ループ・フロー)である。すなわち，任意のルートのフローは，図2のように，ループ・フローを発生させて他の任意のルートのフローに変換される。ループフローがカットと交わるときは必ず偶数回交差する。そしてカットにより切断された片方の側から他の側へ向うフローと同じフローが反対方向にも流れるので差引すると0となり，カットに対してはフローがないことと同じになる。

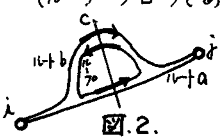

図.2.

これは配分方法によって最大フローが変わらないことを意味している。

計算例

図3に示すネットワークに対し，下に示すようなODパターン$P=\{P_{ij}\}$をもつフローに対する最大フローを計算してみよう。配分方法は最短路配分を用いることにする。ネットワークのアークの長さおよび容量はすべて1とする。

$$P=\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0 \end{array}\right|$$

(ODパターン)

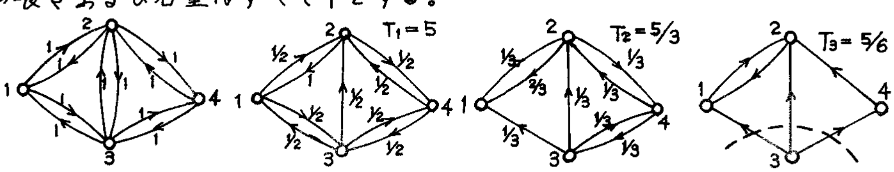

図.3.

$$\therefore\ T=T_1+T_2+T_3=7.5$$

(1) 西村 昂，中村正治「ネットワークの容量に関する一考察」42年土木学会関西支部年次学術講演概要 PP.257~260