貯水池による季節別供給水量の確率的決定について

京都大学防災研究所　○正員　長尾正志
建設省九州地建　正員　日月俊昭

1　まえがき　貯水池による水供給の問題では，貯水池は確率的に変動する流入量を入力とし，需要水量を満たすような作用を貯水量を通じて行なっていく系とみなすことができ，これをランダムな確率入力を受ける在庫問題として考察できる。また，わが国の通常の貯水池のように経年的な流量調節池というよりも季節的な調整池の役割しか果せない程度の容量である場合には，流入量のランダム化も季節ないしそれ以下の期間での総流入量を対象として行なわねばならないが，ここではその後の流入量の確率分布が季節毎に与えられた場合の季節別の供給水量の決定について述べる。(関西支部講演概要，pp109−110，昭42 11参照)

2．貯水量の確率的変化　季節性を考慮してつぎの仮定をおく。

(1)　基礎の仮定　i) 季節わけと季節の長さ：1年をI，II，　，s，…，Sの季節に分け，各季節はn_s（s = I，…，S）個の期間からなる。ii) 流入量の分布：第s季の期間（n，$n+1$），（$n=0, 1, \cdots, n_s-1$）の総流入量$X_n^{(s)}$はランダム変量とし，かつ季節内で$P_r\{X_n^{(s)}=j\}=g_j^{(s)}$のような同じ分布をもつ。iii) 貯水量：$Z_n^{(s)}$を$X_n^{(s)}$が貯水池へ流入する前の時点の貯水量とする。iv) 貯水池容量，放流量：季節内で定められた一定かつ所定の貯水池容量，放流量k_s，m_sを保持させる。

(2)　貯水量の推移確率　i) 貯水量分布の過渡的変化：以上の仮定の下に，第s季の$n+1$時点の貯水量はつぎのようになる。ただし，以下のs季内の議論では添字sを略記する。

$$Z_{n+1}=\min(k, Z_n+X_n)-\min(m, Z_n+X_n), \quad (n=0, 1, \quad , n_s-1) \tag{1}$$

上式で，貯水量系列$\{Z_n\}$が単純マルコフ連鎖を構成することから，季節初期の貯水状態の確率ベクトルを$\mathbb{P}^{(0)}$とすれば，同一季節内の時点nでの推移確率ベクトル$\mathbb{P}^{(n)}$は，

$$\mathbb{P}^{(n)}=\mathbb{P}^{(0)}\,\mathbb{P}^{n} \quad (\mathbb{P}:\text{貯水量の推移確率行列で階数は } k-m+1 \text{ の正方行列，} g_j \text{ の関数}) \tag{2}$$

ところで，あいとなる季節，たとえばI季からII季へ入ると貯水池容量，規定放流量が変るために，推移確率行列が$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}$から$\mathbb{P}_{\mathrm{II}}$に変る。その際，問題となるのは推移確率行列の大きさを示す階数$D_i=k_i-m_i+1$（i = I，II）で，$D_{\mathrm{I}} \neq D_{\mathrm{II}}$であれば推移行列$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}$の性質を用いてII季への接続を行なうことにし，仮想的な推移行列$\mathbb{P}_{\mathrm{I,II}}$を挿入し，IよりIIへ接続させるように考えた。これをD_{I}，D_{II}の大小により2つの場合に分けて考える。a) とりうる状態範囲が拡大する場合（$D_{\mathrm{I}}<D_{\mathrm{II}}$）　I季の初期から考えると，$\mathbb{P}_{\mathrm{I,II}}$を挿入した場合のII季の初めまでの1季節間の推移行列はD_{II}という階数をもち，これはつぎのように表示できる。

$$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}-1}\,\mathbb{P}_{\mathrm{I,II}}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}} & \mathbb{R}\\ \mathbb{K} & \mathbb{Q}\end{pmatrix}, \quad \mathbb{R}, \mathbb{Q}:\text{ゼロ行列}, \quad \mathbb{K}\,(D_{\mathrm{II}}-D_{\mathrm{I}}\text{行}, D_{\mathrm{I}}\text{列})=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3}$$

b) とりうる状態範囲が縮小する場合（$D_{\mathrm{I}}>D_{\mathrm{II}}$）　まず$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}}$を階数$D_{\mathrm{II}}$の部分行列$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}'$を用いて$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}_{\mathrm{I}}' & \mathbb{R}'\\ \mathbb{K}' & \mathbb{Q}'\end{pmatrix}$のように表示しておくと，$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}-1}\mathbb{P}_{\mathrm{I,II}}$は，階数$D_{\mathrm{II}}$をもち，その行列要素は最終列以外は$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}'$の対応要素と同じであるが，最終列の要素は$\mathbb{P}_{\mathrm{I}}'$の最終列の要素に，それと同じ行に対応した行列$\mathbb{R}'$の全要素を累加したものを加えることによって求められる。

さて，以上のようにして得られた季節間の推移行列$\mathbb{P}_{\mathrm{I,II}}$を使えば，II季の初期および季節内の任意の時点$n$における貯水量の状態確率はそれぞれつぎのように表わせる。

$$\mathbb{p}^{(\mathrm{II},0)} = \mathbb{p}^{(\mathrm{I},0)} \mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}-1} \mathbb{P}_{\mathrm{I},\mathrm{II}} \quad , \quad \mathbb{p}^{(\mathrm{II},n)} = \mathbb{p}^{(\mathrm{II},0)} \mathbb{P}_{\mathrm{II}}^{n} \quad (n = 1, 2, \cdots, n_{\mathrm{II}} - 1) \tag{4}$$

また，こうした考えを任意の季節 s まで拡張すれば，s 季の初期および季内の任意時点における貯水量の状態確率はつぎのようになる。ただし，$s = \mathrm{II}, \mathrm{III}, \quad n = 1, 2, \cdots, n_s - 1$

$$\mathbb{p}^{(s,0)} = \mathbb{p}^{(\mathrm{I},0)} \mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}-1} \mathbb{P}_{\mathrm{I},\mathrm{II}} \mathbb{P}_{\mathrm{II}}^{n_{\mathrm{II}}-1} \mathbb{P}_{\mathrm{II},\mathrm{III}} \cdots \mathbb{P}_{s-1}^{n_{s-1}-1} \mathbb{P}_{s-1,s} \quad , \quad \mathbb{p}^{(s,n)} = \mathbb{p}^{(s,0)} \mathbb{P}_{s}^{n} \tag{5}$$

ii) 貯水量の定常分布　一般に，正則なマルコフ過程の収束性により，たとえば才I季の初期における定常分布は，次式を満す $\boldsymbol{w}^{(\mathrm{I},0)}$ として求められる。

$$\boldsymbol{w}^{(\mathrm{I},0)} = \boldsymbol{w}^{(\mathrm{I},0)} \mathbb{P}_{(1)} \quad , \quad \mathbb{P}_{(1)} = \mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}-1} \mathbb{P}_{\mathrm{I},\mathrm{II}} \mathbb{P}_{\mathrm{II}}^{n_{\mathrm{II}}-1} \mathbb{P}_{\mathrm{II},\mathrm{III}} \cdots\cdots \mathbb{P}_{S}^{n_S-1} \mathbb{P}_{S,\mathrm{I}} \tag{6}$$

この $\boldsymbol{w}^{(\mathrm{I},0)}$ が判れば，(5)式を用いて任意時点の定常分布は簡単に求められる。

3. 貯水池による季節別供給水量の決定　以上の結果を用いて貯水池による渇水補給のための供給水量を季節ごとに確率的に決定することができる。以下便宜上 $k_s = k$ としておく。

(1) 渇水確率および最適供給水量の定義　貯水池操作において渇水とは放流量が規定値 m 以下となる場合をいうことにする。いま任意時点 n で利用しうる貯水総量 $Z_n + X_n$ が m に満たなければ，(1)式により $n+1$ 時点では貯水量は必ず0となり，逆に，貯水量が0ならばその前の時点で渇水が生じていることになる。そこで，渇水確率を貯水量が0単位となる定常確率 w_0 と定義する。さらに，最適な供給水量とは，各季節ごとの渇水確率 $w_0^{(s,n)}$ が同程度であり，しかもそれが規定の許容水準 w_a であるような季節的な放流量系列 $\{\tilde{m}_s\}$ であると定義する。つまり，原理的には，次式を満す $\tilde{m}_s$ を選べばよい。

$$w_0^{(s,n)} \{ m = \tilde{m}_s \ (s = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \cdots, S) \} = w_a \quad (n = 1, 2, \cdots, n_s) \tag{7}$$

(2) 最適供給水量の計算　まず規定放流量を年間を通じて一定とし，1単位ずつ増していき，年間を通しての平均的な渇水確率が許容水準に最も近い放流量 m_0 を選び，さらに，計算の出発点として渇水確率 $w_0^{(s,n)}$ が w_a に最も近い時点 n を選んで計算を始める。ところで，同じ季節内では，推移行列はどこでも同じであるから，渇水確率の推移変化は時の経過とともに単調に変化するので，$w_0^{(s,n)}$ は季首または季末で最大または最小となるから，許容水準であるかどうかの判定は季首または季末で行なえばよい。例として，$s = \mathrm{I}$, $n = 0$ を出発点にとると，放流量 m_0 の下の季首の貯水量の定常分布 $\boldsymbol{w}^{(\mathrm{I},0)} \equiv (w_i^{(\mathrm{I},0)})$ をもとにして季末 $n = n_{\mathrm{I}} - 1$ の貯水量分布は(2)式から次式で与えられる。

$$w_j^{(\mathrm{I},n_{\mathrm{I}}-1)} = \sum_{i=0}^{k-m_{\mathrm{I}}} w_i^{(\mathrm{I},0)} p_{ij}^{(n_{\mathrm{I}}-1)} \quad , \quad (p_{ij}^{(n_{\mathrm{I}}-1)} \text{は } \mathbb{P}_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}-1} \text{の } i \text{ 行 } j \text{ 列の要素}) \tag{8}$$

また，そのときの渇水確率 w_0 は上式で $j = 0$ として与えられる。この $p_{ij}^{(n_{\mathrm{I}}-1)}$ は m_{I} を種々変えて前もって計算しておくことができるから，種々の m_{I} について $w_0^{(\mathrm{I},n_{\mathrm{I}}-1)}$ を求め，それが w_a に最も近くなる $\tilde{m}_{\mathrm{I}}$ を選ぶことは容易である。この $\tilde{m}_{\mathrm{I}}$ が判れば，m_{II} を適当に仮定することによって，(4)式からII季の季首さらに季末の貯水量分布さらに渇水確率が求められるから，I季と同様に $\tilde{m}_{\mathrm{II}}$ を計算できる。以下，全く同様に計算を進めればよいが，1年を通して計算してきた定常分布が最初に仮定したものと若干異なることが予想されるから，これが収束するまで計算を繰り返す必要がある。しかし計算の出発点がある種の定常分布を採用しているので，定常状態への収束はかなり早いものと考えられる。

4　適用例　以上の考えを四国柳ヶ瀬ダムに適用し，$w_a = 10\%$，$k = 20$（$3.4\ m^3/s$ 単位）のとき3年の計算で収束に達し，最適供給水量は冬期1，春期3，梅雨期3，台風期4を得た。