# 流出系の状態遷移に関する研究

京都大学工学部　正員　　石原藤次郎
京都大学工学部　正員　　高 棹 琢馬
京都大学大学院　学生員　○池 渕 周一

## 1．はじめに

降水から流量への流出過程に内在する物理的な内部機構の解明は，水利用計画の基本課題である。本研究は流出現象に内蔵されるエントロピー増大の法則に基づき，最大エントロピーを前提として流出系の状態遷移を確率論的に把握しようとしたものである。

## 2．流出系の最大エントロピー

エントロピーという概念は，気体分子の無秩序な運動を説明するために，ボルツマンなどが物理学に導入したものであるが，その後，シャノンが文章の文字配列の基礎にての概念をとりいれ，情報量としてのエントロピーを提案するや，多くの自然現象，社会現象の確率論的構造解明に，この概念が用いられるようになった。いずれにしても現象の不確定性をいったものである。

ところで流出現象を考えると，流域がある平衡状態にあるとき降水が流域に降ると，その平衡は破れ，水分子は自由な無秩序な運動を抑制されるが，やがて流域内の動きうる範囲内で，あらゆる方向に，あらゆる速度で運動をはじめ，もとの無秩序な平衡状態に帰ろうとする。このことは，いわば流出系のエントロピー増大の法則といえ，その極限として最大エントロピーが考えられる。これはまた，降水から流量への流出過程には多くの因子が複雑に作用し，非常にあいまいな，不確定な現象をなして，その構造の理解がきわめて困難であることを意味している。

このように考えると，気体分子の無秩序な運動と同じように，流出現象をエントロピー的に解釈し，流出系の確率的構造解明に最大エントロピーの前提をおくことができよう。

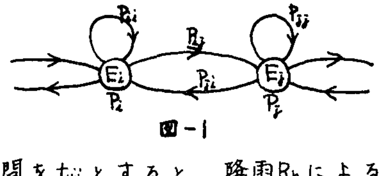
## 3．流出系の状態遷移図と遷移確率の算出

つぎに流出系のエントロピーの数量的表現を考えよう。いま，流出系がとりうる状態を $E_1, E_2 \cdots\cdots E_n$ とし，$E_i$ の状態に $R_k$ なる雨が降ると，系は他の状態 $E_j$ に移り，流量情報源からは流量 $Q_{ij}$ を生起すると考えられる。すなわち，状態遷移図が図-1のように描かれる。

ここに，$P_{ij}$；状態 $E_i$ から $E_j$ への遷移確率

$P_i$；状態 $E_i$ にある確率

矢印は状態遷移の有向線を示す。




図－1

ところで，状態 $E_i$ から $E_j$ に到達する時間すなわち情報源から流量 $Q_{ij}$ を発生するのに要する時間を $t_{ij}$ とすると，降雨 $R_k$ による流出系の平均到達時間Tは次式で与えられる。

$$T = \sum_i \left\{ P_i \sum_j ( P_{ij} t_{ij} ) \right\} \qquad (1)$$

一方，この系において状態 $E_i$ にあることが知られている場合，$E_j$ に $Q_{ij}$ なる流量の生起をと

もなって移るとき発生する情報量は情報理論から

$$-\log P_{ij} \qquad (2)$$

となるから，系全体のもつ情報量は

$$-\sum_i\left\{P_i\sum_j(P_{ij}\log P_{ij})\right\} \qquad (3)$$

で与えられる。したがって，単位時間あたりに系のもつ情報量，すなわちエントロピーは

$$R=-\sum_i\left\{P_i\sum_j(P_{ij}\log P_{ij})\right\}\Big/\sum_i\left\{P_i\sum_j(P_{ij}t_{ij})\right\} \qquad (4)$$

となる。これが流出系のエントロピーの数量的表現である。

前述したように，流出系には最大エントロピーの法則が内蔵されていると仮定できるので，(4)式で与えられる流出系のエントロピーを最大にすることによって，遷移確率$P_{ij}$が算出できる。これは情報理論でいう通信路容量の算出方法であるので，計算過程は省略し，ここでは結果だけを述べる。すなわち$P_{ij}$は

$$P_{ij}=B_j/B_i\times W^{-t_{ij}} \qquad (5)$$

で与えられ，$B_i$は連立方程式

$$\sum_i B_i(W^{-t_{ij}}-\delta_{ij})=0 \qquad (6)$$

なる方程式の最大正実根である。なお$\delta_{ij}$はクロネッカーのデルタである。

以上，流出系の状態遷移について述べたが，この方法は流量系列のマルコフ性を対象とするのではなく，流出の状態遷移に注目することによって，その過程が単純マルコフ過程とみなせるところに意義がある。ただ遷移確率の定常性については問題があるが，非定常とすると理論展開ができないので，近似的に定常となるよう，降雨期，融雪期というように流出形態の違いを考えて，期間区分する必要がある。

## 4. 由良川流域荒倉地点への適用

以上の理論を実際の流域に適用するには，まず流出系の状態を定めなければならない。流出系は一般に表面流出，中間流出，地下水流出状態の3つの状態をとりうるが，日単位での長期間流出を対象とする場合には表面流出状態はほとんど生起せず，中間流出，地下水流出状態の高確率群を考えれば十分である。いま，状態を流量の大きさで与えることにすると中間流出状態は非常に大きな流量範囲をとり，これらの挙動を1つの状態で表現しがたいから，5段階にわけ，地下水流出状態とあわせて6つの状態を考える。また現時点では各状態の量的な分離が困難であるので，由良川流域への適用にあたっては，つぎのような流量範囲で状態を定義することにする。$E_1$，$0\leq$日平均流量$Q(\mathrm{m^3/sec})<5$，$E_2$；$5\leq Q<10$，$E_3$；$10\leq Q<20$，$E_4$；$20\leq Q<40$，$E_5$；$40\leq Q<60$，$E_6$；$60\leq Q<250$，さらに系に作用する日降水量$R(\mathrm{mm/day})$の規模はつぎの5つを考える。$R_1$；$0\leq R<5$，$R_2$；$5\leq R<20$，$R_3$；$20\leq R<40$，$R_4$；$40\leq R<60$，$R_5$；$60\leq R<120$

右表の上段は実測資料から求められた$R_3$の降水規模に対する遷移確率であり，下段は実測資料から得られた$t_{ij}$を用いて(5)式より計算された値である。両者はかなり一致しており，流出系の状態遷移が最大エントロピーの法則に従うようであり，今後はこうした方法を拡張し，流出系の確率的構造をより具体化していきたい。

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ | $E_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 0.273 / 0.255 | 0.455 / 0.314 | 0.236 / 0.431 | 0.036 / | / | / |
| $E_2$ | 0.022 / 0.053 | 0.267 / 0.255 | 0.644 / 0.692 | 0.067 / | / | / |
| $E_3$ | ---- / 0.005 | 0.154 / 0.094 | 0.577 / 0.505 | 0.269 / 0.396 | / | / |
| $E_4$ | ---- / 0.050 | ---- / 0.120 | 0.312 / 0.325 | 0.688 / 0.505 | / | / |
| $E_5$ | ---- / 0.008 | ---- / 0.035 | ---- / 0.375 | 1.000 / 0.582 | / | / |
| $E_6$ | ---- / 0.004 | ---- / 0.034 | ---- / 0.184 | 0.250 / 0.286 | 0.760 / 0.492 | / |