

一様河道における洪水流について

京都大学防災研究所 正員 高橋 保

一様河道を流下する洪水流については、その特性がほぼ明らかにされており、基礎方程式の解も電子計算機によってかなり精度よく求めることができる。本報は一様河道の洪水流をあらわす基礎方程式の物理的な特性とさらに明確にするために、新しい指標を導入し、このことによって非定常流を分類し、洪水流に対する擾動解を得るものである。

(1) 基礎方程式の無次元表示と指標 σ の導入：広幅長方形断面水路における断面平均流の一次元運動方程式と連続式は、

$$S - (1 - \frac{Q^2}{gH^3}) \frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{1}{gH} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{gH^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{n^2 Q^2}{H^3} \dots (1), \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots (2)$$

である。いま、上流端 $x=0$ において図-1に示したような水位-時間曲線が与えられたものとする。さて、(1), (2) 式を無次元化して解析するが、線型変換としては

$$\begin{cases} H = H_m \eta, & t = (H_m/H_u) T_0 \tau \\ Q = \sqrt{gH_m^3} \xi, & x = \sqrt{gH_m^3} (1/H_u) T_0 \zeta \end{cases} \dots (3)$$

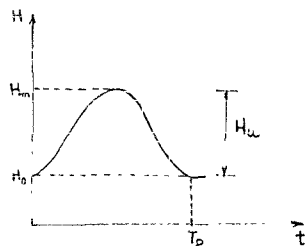


図-1

を採用する。林¹⁾は変換にあたって洪水頂点でのハイドログラフの曲率 κ 、波形の逸減特性に重要な役割を演ずることから、これを重要な要素と考えて長波性の指標 σ を導入した。これは洪水頂点での伝播、減衰現象を説明するのに4都府であるが、洪水波形状全体についての議論はなされておらず、波頂曲率の伝播にともなう変化が不明な段階では実際上、追跡計算を進めることができない。いま、(3) 式のような変換を(1), (2) 式にほどこすと、

$$(1 - \frac{1}{F_r^2} \frac{\xi^2}{\eta^3}) = (1 - \frac{\xi^2}{\eta^3}) \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \sigma \frac{1}{\eta} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + 2\sigma \frac{\xi}{\eta} \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \dots (4), \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = 0 \dots (5)$$

が得られる。ただし、 $\sigma = H_u / \sqrt{gH_m} T_0 \dots (6)$, $F_r^2 = H_m^3 S / n^2 g \dots (7)$ である。

ここに導入された無次元量は水位上昇速度 $(\partial \eta / \partial \tau)$ と水深 H_m に対する長波の伝播速度の鉛直成分との比のオーダ σ の値を持つており、この値の大きさによって非定常流の性質が変化するものと考えられる。このことを明確にするためにハイドログラフの前部近傍における緩波の生起条件をMaitake & Watham²⁾の方法に従って求めると、二等辺三角形形状のハイドログラフに対して、 $\sigma > \frac{n^2 g^{1/2} H_0}{3S \sqrt{gH_m}} (1 + F_r) (1 - \frac{1}{3} F_r) \dots (8)$ (ここに、 F_r は水深 H_0 に対する) Frueha 数

が得られる。例として、 $n = 0.03$, $S = 0.001$, $H_0 = 2m$, $H_m = 8m$ の場合を考えると図式は $\sigma > 1.06$ となる。なお、これに対応する継続時間は $T_0 < 300 \text{ sec.}$ である。

(2) $\sigma \gg 1$ の場合：このようなとき(4) 式の左辺は σ にくらべて無視される、さらに、波高の微小な変動を考慮して線型化すると、(4), (5) 式より

$$(1 - \frac{\xi^2}{\eta^3}) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \frac{2\xi}{\eta_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta \partial \tau} = 0 \dots (9)$$

と得る。ただし、添字0は基底流に対するものを示している。この微分方程式の条件

$$\eta(3,0)=0, \quad \eta_c(3,0)=0, \quad \eta(0,\tau)=f(\tau)=1; (\tau>0\text{のとき}) \\ =0; (\tau\leq 0\text{のとき}) \quad \left\{ \dots \right. \quad (10)$$

のその解は、 $\eta(3,\tau)=1, (\tau>0\text{のとき}); =0, (\tau\leq 0\text{のとき})$ が伝播速度 $\omega = u_0 + \sqrt{A_0}$ で伝播するような理想段波を示している。

(3) $\sigma \approx 1$ の場合: (4),(5)式は微小変動法による線型化によって解かれ得るが、このような波に対するこの方程式の妥当性に関して物理的に疑問があり、鉛直方向の運動も考慮に入れる必要があるものと思われる。

(4) $\sigma \ll 1$ の場合: 一般に浅水流と呼ばれる場合であり、 σ による振動解が求まる。

$$\eta = \eta_0(3,\tau) + \eta_1(3,\tau)\sigma + \eta_2(3,\tau)\sigma^2 + \dots, \quad \xi = \xi_0(3,\tau) + \xi_1(3,\tau)\sigma + \xi_2(3,\tau)\sigma^2 + \dots \quad (11)$$

のように展開して考えよう。境界条件および初期条件は、

$$\xi=0\text{で}, \quad \eta = \eta_0(\xi) = f(\xi), \quad \eta_1 = \eta_2 = \dots = 0, \quad \tau=0\text{で} \quad \eta = \eta_0(3) = H/4u_m (=const) \quad \dots (12)$$

である。(11)式を(4),(5)式に代入して σ のべき乗に整理する。 σ のべき乗の係数に0とおくことより振動解が得られるが、 σ の0次の項より、

$$1 - (1/F_1^2)(\partial^2 \xi_0 / \partial \tau^2) = 0 \quad \dots (13), \quad \partial \eta_0 / \partial \tau + \partial \xi_0 / \partial \xi = 0 \quad \dots (14) \text{ を得る。これより、}$$

より近似解 η_0 の一般解は特性曲線 $d\xi/d\tau = \frac{1}{3}F_1 \eta_0^{2/3} \quad \dots (15)$ 上において、

$$\eta_0 = f(\tau - \frac{1}{3}F_1 \eta_0^{1/3}) \quad \dots (16) \text{ として求まる。つぎに、}\sigma\text{の1次の項より、}$$

$$\frac{1}{F_1^2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \tau^2} \left(\frac{10}{3} \frac{\eta_1}{\eta_0} - \frac{2\eta_1}{\eta_0} \right) = \left(1 - \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} + 2 \frac{\xi_1}{\eta_0^2} \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \quad \dots (17), \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} = 0 \quad \dots (18)$$

が得られ、この解は特性曲線(15)上において、

$$\eta_1 = \frac{4}{15} \frac{K}{\frac{\partial \eta_0}{\partial \xi}} \left\{ 1 - 2\eta_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \xi \right) \right\} \quad \dots (19), \quad \text{ただし、} K = \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{1}{3} \eta_0 - \frac{4}{7} F_1^2 \eta_0^{1/3} \right) + \frac{1}{2} \eta_0^2 \left(1 + \frac{4}{7} F_1 \eta_0^{1/3} \right) \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \quad (20)$$

として求まる。なお、波頂では $f=1, \xi=0, \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} = \frac{7}{25 F_1^2} f$ であるから、別途は特性曲線、

$d\xi/d\tau = \frac{1}{3}F_1 \quad \dots (21)$ 上において、 $\eta_1 = \frac{27}{250} \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{4}{7} \right) f \xi \quad \dots (22)$ のように求まる。この二ハイドログラフ全体の波形についての第2近似解が求まった。波頂については林の第2近似解と一致している。 σ がかなり大きな場合を予想して波頂に対する第3近似解を求めよう。 σ^2 の項までを考慮することにより、

$$-\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \tau^2} \left[\frac{130}{15} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2} - \frac{20\eta_1 \eta_2}{3\eta_0^2} + \frac{\eta_2^2}{\eta_0^2} - \frac{10}{3} \frac{\eta_2}{\eta_0} + \frac{2\eta_2}{\eta_0} \right] = \left(1 - \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi_0}{\partial \tau} + \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial \xi_2}{\partial \tau} - \frac{\eta_1 \partial \eta_0}{\eta_0^2 \partial \tau} + \frac{2\eta_0 \partial \eta_0}{\eta_0^2 \partial \xi} \left(\frac{\eta_1}{\eta_0} - \frac{2\eta_1}{\eta_0} \right) \quad (23)$$

$$\partial \eta_1 / \partial \tau + \partial \xi_2 / \partial \xi = 0 \quad \dots (24) \text{ を得るから、解は特性曲線(21)上において}$$

$$\eta_2 = \frac{1701}{12500} \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{4}{7} \right) \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{13}{7} \right) f^2 \xi^2 \quad \dots (25)$$

と得る。波頂における解の次元を元に戻せば、第3近似までで、

$$H = H_m \left[1 + \frac{27}{250} \frac{F_1(\text{peak})}{Sg H_m} \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{4}{7} \right) \lambda + \frac{1701}{12500} \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{4}{7} \right) \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{13}{7} \right) \frac{F_1^2(\text{peak})}{Sg^2 H_m^2} \lambda^2 \right] \quad \dots (26)$$

となる。なお伝播速度は(21)よりKleitz-Seddonの法則に従うことがわかる。数値計算結果について、は議論路に述べる。

参考文献
1) 林義三: Mathematical Theory and Experiment of Flood Waves, 1958
2) Righi, A. Whitham: On Kinematic Waves, Proc. Roy. Soc. London, vol. 217, 1955