固液混相流に関する考察

京都大学工学部　正員　工博　岩佐義朗
大成建設　〃　工修　○花村哲也

1．まえがき　固液混相流に関する理論的な解析は，従来から，志村氏[1]，日野氏[2]などによって試みられてきた。本研究では，固相，液相の区別をはっきり示し，それらの相対運動を考察して，連続式，運動式，エネルギー式を導いた。さらに，カルマン定数，まさつ抵抗係数の変化に対する考察を加えた。

2．基礎方程式　開水路流れを取り扱うものとして，座標系に直交座標系 (x, y, z) を用いる。x を主流方向，y を反重力方向にとる。

単相流と混相流の関係を見るために，対比させて基礎方程式を示す。ある相 s を考えると，その濃度を c_s とすると　混相流中の各相の方程式は，濃度をかけたもので示される。テンソル表示で示すと，単相流と，混相流中の相 s の関係はつぎのようになる。ただし，固相のような場合も，つぎに示すように，ニュートン流体として表わされると仮定する。

	単相流	混相流中のある1相 s
連続式	$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=0$	$\rho_s \frac{\partial c_s u_i}{\partial x_i}=0$
運動方程式	$\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + F_i$	$\rho_s \frac{\partial}{\partial x_k}(c_s u_i u_k) = -\frac{\partial}{\partial x_i} c_s p + \mu_s c_s \nabla^2 u_i + c_s F_i$
エネルギー式	$\rho u_i u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu u_i \nabla^2 u_i + u_i F_i$	$\frac{1}{2}\rho_s \frac{\partial}{\partial x_k}(c_s u_i u_i u_k) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(c_s u_i p) + \frac{1}{2}\mu_s c_s \frac{\partial^2 u_i u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \mu_s c_s \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - \rho_s c_s u_i F_i$

u_i，F_i は，それぞれ速度成分，外力成分である。　$(i = 1, 2, 3)$ $(k = 1, 2, 3)$

ρ，μ は　密度，粘性係数である。　i, k の 1, 2, 3 は x, y, z に対応する。

固液2相流では，各成分の関係はつぎのようになる。

	液相	固相
ρ_s	ρ_0	$\rho_0 \gamma$
c_s	$(1-c)$	c
u_1	$U+u'$	U_p+u_p'
u_2	v'	v_p'
u_3	w'	w_p'
μ_s	μ	μ_p

また，$\left\{ \begin{array}{l} c = \bar{c} + c', \quad F_1 = F_3 = 0, \quad F_2 = -g \\ \bar{p} = \rho_0 g (h - y) \quad (g \text{は重力加速度}) \end{array} \right.$

これらの関係に加えて，速度平均量は x，z 方向に独立である。したがって，各式を平均して，乱れ運動に対する基礎方程式はつぎのようになる。

① 連続式　各相の質量が保存されることと，水面での境界条件より，v_0 を沈降速度とすると，

$$\left. \begin{array}{ll} \text{液相に対して} & \overline{c'v'} = 0 \\ \text{固相　〃} & \overline{c'v_p'} - \bar{c} v_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

② 運動方程式　2相間の相互作用を考慮して，各相について，運動方程式を導くことができる。主流方向のみについて示す。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dy}\{(1-\bar{c})\overline{u'v'}-\overline{c'u'v'}\}=\nu(1-\alpha\bar{c})\nabla^2 U\\&\frac{d}{dy}\{\gamma\bar{c}\,\overline{u_p'v_p'}+\gamma\overline{c'u_p'v_p'}-\gamma v_0\overline{c'u_p'}\}=\nu_p\overline{c\nabla^2 u_p}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

ここに，αは，液相が単相流の場合と同様に運動する部分を補正する係数で，$1\leqq\alpha$。ν_pは，固相の存在による粘性力を示す係数である。固相それ自身はせん断変形はしないが，固相の存在により，固相と液相のあいだの相対運動が生じ，速度勾配が生じ，固相のまわりの液相のせん断変形による粘性力と，固相同志の衝突によるまさつ力を示すために導入された係数で，固相の粘性係数として取り扱う。壁面と，水面条件を考慮して，積分すると，

$$(1-y/h)U_*^2=\nu(1-\alpha\bar{c})\frac{dU}{dy}+\nu_p\bar{c}\frac{dU_p}{dy}-\{(1-\bar{c})\overline{u'v'}-\overline{c'u'v'}+\gamma\bar{c}\,\overline{u_p'v_p'}+\gamma\overline{c'u_p'v_p'}-\gamma v_0\overline{c'u_p'}\}$$

ただし　$U_*^2=[\nu(1-\alpha\bar{c})dU/dy]_{y=0}+[\nu_p\bar{c}\,dU/dy]_{y=0}$，　h：水深　—(3)

③ エネルギー式　　液相，固相の各方向式を加え合わせて，平均すると，次式が混相流エネルギー式が得られる。

$$\begin{aligned}U_*^2\frac{dU}{dy}=&\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left[(1-\bar{c})\overline{v'q'^2}+\gamma\bar{c}\,\overline{v_p'q_p'^2}-\gamma\bar{c}v_0\overline{q_p'^2}-\overline{c'v'q'^2}+\gamma\overline{c'v_p'q_p'^2}-\gamma v_0\overline{c'q_p'^2}\right]\\&\mp\frac{1}{\rho}\frac{d}{dy}\left[\overline{p'v'}+\bar{c}(\overline{p'v_p'}-\overline{p'v'})+(\overline{c'p'v_p'}-\overline{c'p'v'})\right]\\&+\nu(1-\alpha\bar{c})\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\overline{q'^2}+\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}\right]\\&+\nu_p\bar{c}\left[\left(\frac{dU_p}{dy}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}\overline{q_p'^2}+\overline{\left(\frac{\partial u_{pi}'}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_{pi}'}{\partial x_j}\right)}\right]+\rho_0(\gamma-1)\bar{c}v_0 g\\&+\frac{1}{2}\overline{c'[\nu_p\nabla^2 q_p'^2-\alpha\nu\nabla^2 q'^2]}+\overline{c'\left[\nu_p\left(\frac{\partial u_{pi}'}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_{pi}'}{\partial x_j}\right)-\alpha\nu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\right]}\\&+\nu_p\overline{u_p'c'}\frac{d^2U_p}{dy^2}-\alpha\nu\overline{u'c'}\frac{d^2U}{dy^2}\end{aligned}\qquad(4)$$

④ 速度分布式　　混合距離理論を用いて，　$-\overline{u'v'}=l_1^2\left(\frac{dU}{dy}\right)^2$，$-\overline{u_p'v_p'}=l_2^2\left(\frac{dU}{dy}\right)^2$

$U_p=\beta_0 U$，　$\overline{c'u_p'}=a_1\overline{c'u_p'}=a_1\bar{c}v_0$　の関係から，(3)式は，

$$(1-y/h)U_*^2=\{(1-\bar{c})+\beta_0 l_2/l_1\}l_1^2\left(\frac{dU}{dy}\right)^2$$

$\{(1-\bar{c})+\beta_0 l_2/l_1\}l_1=K_m y$　の仮定を導入して，

$$dU/dy=\frac{U_*}{K_m y}\sqrt{1-a_1\bar{c}\gamma(v_0/U_*)^2}\qquad(5)$$

$v_0\ll U_*$　$\bar{c}\ll 1$　より　$a_1\bar{c}\gamma(v_0/U_*)^2$は1に比して小さい。これは対数速度分布を示す式

3、カルマン定数に関する考察

Laufer[3]の乱流実験結果から，平均流からの乱れエネルギー生産量は，乱れによる熱逸散に費やされることから，(4)式において，$\nu[(1-\alpha\bar{c})+\nu_p/\nu\,\bar{c}]=\nu(1+B\bar{c})$　とおいて，またc'による項は$\bar{c}$による項と比較して小さいと仮定すると，　単相流では，(1)式と(3)式より

$U_*^3/K_0\ln(h/\delta-1)=\int_\delta^h\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}dy$　であり，　混相流では

$$\frac{U_*^3}{K_m}\left(\ln\frac{h}{\delta}-1\right)=\frac{U_*^3}{K_0}\left(\ln\frac{h}{\delta}-1\right)(1+B\bar{c}_a)+(\gamma-1)\bar{c}v_0 g(h-\delta)\qquad(6)$$

したがって

$$\frac{1}{K_m}=\frac{1}{K_0}(1+B\bar{c}_a)+\frac{(\gamma-1)\bar{c}_a v_0 g(h-\delta)}{U_*^3(\ln h/\delta-1)}\qquad(7)$$

4．まさつ抵抗係数に関する考察

断面平均流速U_0を固定すると，　$f_m=f_0(1+B\bar{c})+\dfrac{16\sqrt{2}K_0(\gamma-1)\bar{c}_a v_0(h-\delta)g}{\sqrt{f_0}\,U_0^2(\ln h/\delta-1)}$　(8)

参考文献，2）日野幹雄；土木学会論文集 第92号（昭37.4）　　1)，3）についても2）を参照．