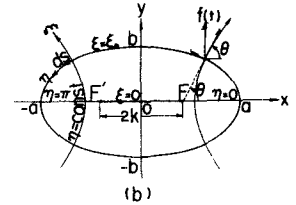
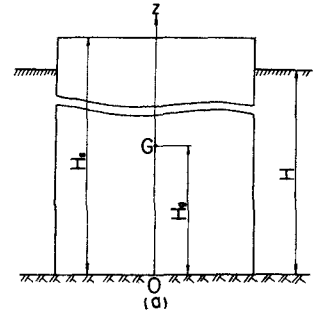


地盤中の楕円形基礎の振動解析について

京都大学 工学部 正員 後藤 尚男
 京都大学防災研究所 正員 土岐 憲三
 京都大学 工学部 正員 ○秋吉 卓

1. まえびき 地盤中にある構造物の振動特性やその耐震設計に関してはまだ未解決の問題が多いが、円形断面の構造物基礎については詳細な理論的な解析¹⁾がすでに行なわれている。また、楕円形断面を有する構造物の動揺振動については筆者等も同様な研究²⁾を行なったが、ここでは楕円形断面を持つ杭の弾性振動について論じ、振動性状と断面形状との関係について検討を進める。

2. 地盤の運動と杭に働く振動圧 解析に当っては図-1に示したごとく、楕円形断面の杭が厚さHの表層地盤を経て基礎地盤で支持されている振動系を考え、このような振動系の全体が水平方向に調和運動を行うものとする。また、表層地盤は均質等方な弾性体と考え、鉛直方向の変位成分は水平方向に比較して小さいものとしてこれを省略する。振動系全体が短軸方向に運動する場合の表層地盤の運動方程式は楕円筒座標系 (ξ, η, z) において次式で表わされる。



Model and Elliptic Cross Section

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (l u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (l u_\eta) \right\} - \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (l u_\xi) - \frac{\partial}{\partial \eta} (l u_\eta) \right\} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial t^2} - \rho e_0 \omega^2 e^{i\omega t} \frac{f_\xi \cosh \xi \sin \eta}{l} \quad (1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (l u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (l u_\eta) \right\} + \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (l u_\xi) - \frac{\partial}{\partial \eta} (l u_\eta) \right\} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} - \rho e_0 \omega^2 e^{i\omega t} \frac{f_\eta \sinh \xi \cos \eta}{l} \quad (2)$$

ここに、 $l = \sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} / \sqrt{2}$ 、 λ, μ : Lamé の定数、 ρ : 地盤の密度、 u_ξ : 基礎の最大振幅、 $f_\xi = \sqrt{a^2 - b^2}$ 、 a, b : 楕円形断面の長径と短径、 u_ξ, u_η : ξ と η 方向の変位
 基礎面および地表面での境界条件を満足する式(1), (2)の解を求め、しる後、楕円形断面の杭構造物表面に作用する高さ方向単位長さ当たり作用する全振動圧 $p(z)$ を計算すると、次式が得られる。

$$p(z) = - \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \rho \pi \omega_g^2 \xi_m^2 \left\{ C_1 a B_1^{(1)} N_{e1}^{(2)}(\xi_0, g_2) + D_1 b A_1^{(1)} M_{e1}^{(2)}(\xi_0, g_2) \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad (3)$$

ここに、 $M_{e1}^{(1)}(\xi, g_2)$, $N_{e1}^{(2)}(\xi, g_2)$ は変形マシュ-関数である。さらに、 $\omega_g = \nu_t \pi / 2H$ 、 $\xi_m^2 = (\omega / \omega_g)^2 - m^2$ 、 $g_1 = \frac{f_\xi^2}{4} \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \left(\frac{\nu_t}{\nu_l} \right)^2 \xi_m^2$ 、 $g_2 = \frac{f_\eta^2}{4} \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \xi_m^2$ 、 $\nu_t^2 = \mu / \rho$ 、 $\nu_l^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$ 、 m は正整数、 C_1, D_1 は積分定数である。

上式中の積分定数 C_1, D_1 は楕円形断面構造物の表面における境界条件から決定されるが、これは構造物の振動形態によって変化する。

3. 地盤中における橋脚杭の弾性振動 基礎盤面で支持され、その頂部は頂度地表面と一致している橋脚杭を考え、地表面上にある上部構造物の慣性力は橋脚杭の頂部に水平方向に作用するものとすれば、その中心軸の水平方向の変位 U_p に関して次式が成立つ。

$$\rho_p^* \pi a b \frac{\partial^2 U_p}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^4 U_p}{\partial z^4} = -\rho_p^* \pi a b \ddot{u}_g + p(z) + q(z) \quad (4)$$

ここに、 ρ_p^* は橋脚杭の密度であり、 $p(z)$ は橋脚杭表面に働く振動圧、 $q(z)$ は上部構造物から伝達される水平力である。いま、橋脚杭の変位 U_p を次式のごとく正弦フーリエ級数で展開する。

$$U_p(z) = \sum_{m=1,3,5,\dots} U_m \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad (5)$$

このとき、橋脚杭表面で満足すべき境界条件を考慮すれば、式(3)中の積分定数は U_m を含む関数項に置き換えられる。また、 $q(z)$ は変位 U_p を用いて次式のごとく表わされる。

$$q(z) = \frac{W}{g} \omega^2 [U_p(H) + u_g] \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad (6)$$

以上の式(3),(5),(6)を式(4)に代入めは、 U_m は次式のよう計算される。

$$U_m = \frac{(\rho_p^* + \rho \Omega_m) \pi a b u_g \omega^2 \frac{4}{m\pi} + \frac{2}{H} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{W}{g} [U_p(H) + u_g]}{EI \left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2 - \rho_p^* \pi a b \omega^2 - \rho \pi a b \Omega_m \xi_m^2 \omega_g^2} \quad (7)$$

ここに、 W は上部構造物の重量、 EI は橋脚杭の曲げ剛性であり、 Ω_m は次式で示される。

$$\Omega_m = \frac{\frac{a}{b} (B_1^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\dot{M}_{e1}^{(2)}(\xi_0, \xi_2)}{M_{e1}^{(2)}(\xi_0, \xi_2)} + \frac{b}{a} (A_1^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\dot{N}_{e1}^{(2)}(\xi_0, \xi_1)}{N_{e1}^{(2)}(\xi_0, \xi_1)} - 2A_1^{(1)} B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)}}{\sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\dot{M}_{e1}^{(2)}(\xi_0, \xi_2)}{M_{e1}^{(2)}(\xi_0, \xi_2)} \frac{\dot{N}_{e1}^{(2)}(\xi_0, \xi_1)}{N_{e1}^{(2)}(\xi_0, \xi_1)} - \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right\}^2} \quad (8)$$

式(7)と式(5)に用いれば、橋脚杭の振動変位 U_p が定まる。基礎地盤の変位 u_g に対する橋脚杭の絶対変位 $(U_p(z) + u_g)$ で増幅率 $K(z)$ を定義すれば、それは次式で与えられる。

$$K(z) = \left| \frac{U_p(z) + u_g}{u_g} \right| = \left| \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 G(H, \omega)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \frac{F(H, \omega)}{F(H, 0)}} \frac{F(z, \omega)}{F(H, 0)} + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 G(z, \omega) \right| \quad (9)$$

ただし、

$$F(z, \omega) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4 - \chi_2 \frac{\rho_p^*}{\rho} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 - \chi_2 \xi_m^2 \Omega_m} \sin \frac{m\pi z}{2H}$$

$$G(z, \omega) = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{\chi_2 (\Omega_m + \frac{\rho_p^*}{\rho}) \frac{4}{m\pi}}{m^4 - \chi_2 \frac{\rho_p^*}{\rho} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 - \chi_2 \xi_m^2 \Omega_m} \sin \frac{m\pi z}{2H}, \quad \chi_2 = \frac{\rho \pi a b}{EI} \left(\frac{2H}{\pi} \right)^2 \omega_g^2$$

式(9)は基礎からの距離 z の関数である ω の関数とも考えられるから、この式は地盤中の任意の深さにおける橋脚杭の弾性振動に関する周波数応答曲線を与えるものである。以上は短軸方向の振動についての解析であるが、長軸方向についても上と同様な議論ができる。なお数値計算の方法とその結果については講演時に譲る。

- 1) 田谷見 宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について、日本地震工学シンポジウム(1966)講演集、昭41.10.
- 2) 後藤尚男・土岐憲三・教吉 卓：弾性地盤中にある橋脚形基礎の振動性状、新大阪防災研究所年報第11号A、昭43.3.