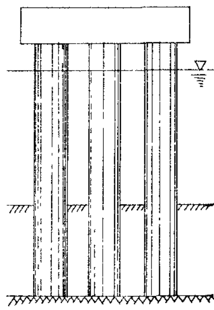
多柱式基礎の非線形振動について

大阪市立大学　正員　倉田宗章
大阪工業大学　正員　岡村宏一
近畿地方建設局　正員○多田浩彦

1. まえがき　本州四国連絡橋の基礎の１型式として水深の大きな場所に多柱式基礎が立案されている。この基礎は図－１に概要を示す様に大口径の鋼製 Cylinder を沈下根入れさせて支持層に到達させ頂部を剛な頂板で連結する大規模なものであるが耐震設計上未解決の問題をかなり残している。

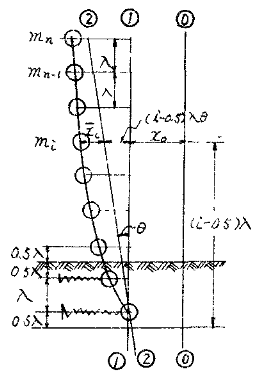


図－１

強大な地震力を受けるために条件によっては柱の一部に浮上り或いは基礎地盤の一部に塑性流動が生ずることも考えられ，かかる場合には非線形の振動特性を検討する必要があると思われる。本文に示した解析法はこの基礎の平面内の振動を扱い上記のような非線形の特性を含め実際の設計を行うための理論の実用化を計ったものである。

2. 基本仮定

頂板は剛体，柱及び地盤は弾性体と見做し各柱は等脚剛度一定とし便宜上構造を若干個の lumped mass，地盤バネで置換したモデルを考える。　地震時の振動は構造全体の剛体としての並進運動及び回転運動と，柱の構造要素としての弾性振動の連成運動で表される。柱の一部に浮上りを生じた場合の地盤の引張抵抗を無視し，地盤の一部に塑性変形を生じた場合は後述のように略近化した反力分布を想定する。



図－２

3. 水平変位運動方程式

図－２を参照して柱下端を着目点とし⓪～⓪線は柱の静止位置，①～①線は地動変位 x_0 を受け剛体変位した位置，②～②線は下端を中心として剛体回転を受けた位置，とすれば lumped mass m_i の水平変位 x_i は

$$x_i = \bar{x}_i + \rho_i\theta + x_0 \qquad (1)$$

たゞし　$\bar{x}_i$：頂板が回転しないと仮定した場合の水平弾性変位

$\rho_i\theta$：頂板の回転に伴う固定モーメントの緩和による水平変位

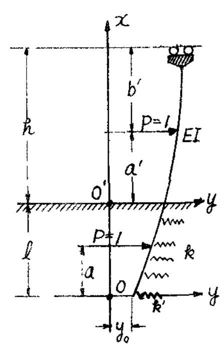
m_i に働く慣性力 F_i は　［ρ_i は係数］

$$F_i = -m_i\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}(\bar{x}_j + \rho_i\theta) \qquad (2)$$

(1),(2)の両式を用い更に減衰力　$\bar{C}_i(\dot{\bar{x}}_i + \rho_i\dot{\theta}_i)$ を考慮して結局次の運動方程式を得る。

$$m_i(\ddot{\bar{x}}_i + \rho_i\ddot{\theta}) + \bar{C}_i(\dot{\bar{x}}_i + \rho_i\dot{\theta}) + \sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}(\bar{x}_j + \rho_j\theta) = -m_i\ddot{x}_0 \qquad (3)$$

$$(i = 1, 2, 3, \text{-----} n)$$



図－３

たゞしρ_{ij}は応力影響係数で次のように変位影響係数δ_{ij}を求めることにより得られる。
今図－3を参照して地中部に P＝1が作用する場合は原点を0とすると地中部任意ケ所のδ_{ij}は

$$\delta_{ij} = y_0\left\{F_1(\lambda x) - \frac{k'}{\lambda^3 EI}F_4(\lambda x)\right\} + \theta_0\frac{F_2(\lambda x)}{\lambda} + \frac{F_4\{\lambda(x-a)\}}{\lambda^3 EI} \quad \text{(4)}$$

y_0, θ_0の決定式は

$$y_0 k\left\{\frac{F_4(\lambda l)}{h\lambda^2} + \left(1+\frac{k'}{hk}\right)\frac{F_3(\lambda l)}{\lambda} + \frac{k'}{k}(\lambda l)\right\} - \theta_0 k\left\{\frac{F_1(\lambda l)}{4h\lambda^3} - \frac{F_4(\lambda l)}{\lambda^2}\right\} - P\left\{\frac{F_3\{\lambda(l-a)\}}{h\,\lambda} + F_2\{\lambda(l-a)\}\right\} = 0 \quad \text{(5)}$$

$$y_0 k\left\{\frac{F_2(\lambda l)}{\lambda} + \frac{k'}{k}F_1(\lambda l)\right\} + \theta_0 k\frac{F_3(\lambda l)}{\lambda^2} - PF_1\{\lambda(l-a)\} = 0 \quad \text{(6)}$$

地上部任意ケ所のδ_{ij}，原点$0'$として $\delta_{ij} = \frac{M_l}{FI}\left(hx - \frac{1}{2}x^2\right) + y_l$ ―――― (7)

M_l, y_lの決定式

$$M_l = y_0\left\{F_1(\lambda l) - \frac{k'}{\lambda^3 EI}F_4(\lambda l)\right\} + \theta_0\frac{F_2(\lambda l)}{\lambda} + P\frac{F_4\{\lambda(l-a)\}}{\lambda^3 EI}$$

$$M_l = y_0\left\{\frac{k}{\lambda^2}F_3(\lambda l) + \frac{k'}{\lambda^2 EI}F_2(\lambda l)\right\} + \theta_0\frac{kF_4(\lambda l)}{\lambda^3} - P\frac{F_2\{\lambda(l-a)\}}{\lambda} \quad \text{(8)}$$

地上部に P＝1 が作用する場合は原点を$0'$として地中部任意ケ所のδ_{ij}は

$$\delta_{ij} = y_0\left\{F_1(\lambda x) - \frac{k'}{\lambda^3 EI}F_4(\lambda x)\right\} + \theta_0\frac{F_2(\lambda x)}{\lambda} \quad \text{(9)}$$

y_0, θ_0の決定式

$$y_0 k\left\{\frac{F_4(\lambda l)}{h\lambda^2} + \left(1+\frac{k'}{hk}\right)\frac{F_3(\lambda l)}{\lambda} + \frac{k'}{k}F_2(\lambda l)\right\} - \theta_0 k\left\{\frac{F_1(\lambda l)}{4h\lambda^3} - \frac{F_4(\lambda l)}{\lambda^2}\right\} + P\frac{\lambda a'}{2}\left(\frac{b'}{h}+1\right) = 0$$

$$y_0 k\left\{\frac{F_2(\lambda l)}{\lambda} + \frac{k'}{k}F_1(\lambda l)\right\} + \theta_0\frac{kF_3(\lambda l)}{\lambda^2} - P = 0 \quad \text{(10)}$$

地上部任意ケ所のδ_{ij}

$$\delta_{ij} = \frac{P}{6EI}\left\{\frac{3a'(h+b')}{2h}x^2 - x^3 + H_{a'}(x-a')^3\right\} + \theta_l\left(x - \frac{x^2}{2h}\right) + y_l \quad \text{(11)}$$

$$\text{茲に } H_{a'}(\text{Step Function}) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a' \\ 1 & a' \leq x \leq h \end{cases}$$

y_l, θ_lの決定式

$$y_l = y_0\left\{F_1(\lambda l) - \frac{k}{\lambda^3 EI}F_4(\lambda l)\right\} + \theta_0\frac{F_2(\lambda l)}{\lambda}$$

$$\theta_l = -y_0\left\{4\lambda F_4(\lambda l) + \frac{k}{\lambda^2 EI}F_3(\lambda l)\right\} + \theta_0 F_1(\lambda l) \quad \text{(12)}$$

ここに

$$F_1(\lambda x) = \cosh\lambda x\cos\lambda x, \quad F_2(\lambda x) = \frac{1}{2}(\cosh\lambda x\sin\lambda x + \sinh\lambda x\cos\lambda x)$$

$$F_3(\lambda x) = \frac{1}{2}\sinh\lambda x\sin\lambda x, \quad F_4(\lambda x) = \frac{1}{4}(\cosh\lambda x\sin\lambda x - \sinh\lambda x\cos\lambda x), \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

又，k＝水平方向地盤バネ係数，k'＝柱末端に於ける基盤のせん断バネ係数
以上より変位影響係数よりなるδ matrix が求められρ matrix は$\rho = \delta^{-1}$として求まる。

4 迴転変位運動方程式

構造の重心Gに関する慣性モーメントをI_Gとすれば迴転運動の方程式は3本分の脚を考えて

$$-3\sum_{j=1}^{n}F_j(j-0.5)\lambda + I_G\ddot{\theta} + \bar{C}\dot{\theta} + M_1(x,\theta) + M_2(\theta) = 0 \quad \text{(13)}$$

たゞし水平鉛直各方向の復元モーメントの和は

$$M_1(x,\theta) + M_2(\theta) = \sum_{j=1}^{r}A_j\bar{x}_j + B\theta + C \quad \text{(14)}$$

の形で表はすことが出来る。
こゝでrは地中部分にある mass の個数である。(1),(2),(13),(14)より結局運動方程式は

$$3\sum_{j=1}^{n} m_j(j-0.5)\lambda\left\{\ddot{\bar{x}}_j+p_j\ddot{\theta}\right\}+I_G\ddot{\theta}+\bar{C}\dot{\theta}+\sum_{j=1}^{r}A_j\bar{x}_j+B\theta+C=-\ddot{x}_0 3\sum_{j=1}^{n}m_j(j-0.5)\lambda \quad \text{———} (15)$$

(14)に示す復元モーメントの和は鉛直方向復元モーメント$M(\theta)$により次の3 caseに分類される.

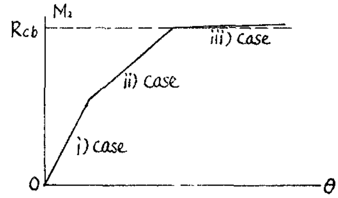
(i) 脚反力が弾性的な場合, $W \geqq b\theta k''$

(ii) 一方の脚が浮上る場合 $W < b\theta k'$

(iii) 最大脚反力が塑性限界応力R_cに達した場合

又(14)の係数内容は次の通りである.

case	A_j	B	C
(i)	$3k\lambda^2(j-0.5)$	$3k\lambda^2\sum_{j=1}^{r}(j-0.5)p_j+2b^2k''$	0
(ii)	仝上	$3k\lambda^2\sum_{j=1}^{r}(j-0.5)p_j+\frac{1}{2}b^2k''$	$\frac{3Wb}{2}$
(iii)	仝上	$3k\lambda^2\sum_{j=1}^{r}(j-0.5)p_j$	R_cb



上表中 W: 脚一本の重量 b: 脚の間隔 k'': 鉛直方向地盤バネ係数

5 応答加速度, 変位の計算

今 $\frac{\bar{C}_i}{m_i}=\mu$ を一定と見做し変数を分離する.

$$\bar{x}_i+p_i\theta=Z_i,\quad \dot{\bar{x}}_i+p_i\dot{\theta}=\dot{Z}_i,\quad \ddot{\bar{x}}_i+p_i\ddot{\theta}=\ddot{Z}_i \text{ ——} (16)$$ 又 $p_{ij}=\alpha_{ij}$ —(17) とおけば

(3)式は $m_i\ddot{Z}_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}Z_j+C_i\dot{Z}_i=-m\ddot{x}_0\quad (n=1,2,3\cdots,n)$ —(18) と書ける。(18)の自由振動の特性方程式の固有値 $p_i^2(i=1,2,3\cdots\cdots n)$ を求め p^2の値として任意のp_s^2を用いたときの$\frac{Z_i}{Z}$を$\frac{Z_{is}}{Z}$と書けば

$$L_s^2=\sum_{i=1}^{n}Z_{is}^2m_i=Z_{1s}^2\left\{m_1+\sum_{i=2}^{n}m_i\left(\frac{Z_{is}}{Z_{1s}}\right)^2\right\} \text{—} (19)\qquad e_{is}=\frac{Z_{is}}{L_s}=\frac{\left(\frac{Z_{is}}{Z_{1s}}\right)}{\sqrt{m_1+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{Z_{is}}{Z_{1s}}\right)^2}} \text{——} (20)$$

$\mathbb{Q}=\begin{vmatrix}e_{11} & e_{n1}\\ e_{1n} & e_{nn}\end{vmatrix}$ $\alpha=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{n1}\\ \alpha_{n1} & \alpha_{nn}\end{vmatrix}$ なるMatrixを導入し, $\Lambda=\begin{vmatrix}p_1^2 & 0\\ 0 & p_n^2\end{vmatrix}$ $\mathbb{I}$をunit Vectorとし $(Z_1, Z_2\cdots Z_n)$ を要素とするColumn Matrixを$\mathbb{Z}$, $(\ddot{x}_0\cdots\cdots)$ よりなる n 要素のColumn Matrixを$\ddot{\mathbb{X}}_0$と書けば

(18)はMatrix表示で $M\ddot{\mathbb{Z}}+\alpha\mathbb{Z}+C\dot{\mathbb{Z}}=-M\ddot{\mathbb{X}}_0$ $M=\begin{bmatrix}m_1 & & 0\\ & m_2 & \\ 0 & & m_n\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}C_1 & & 0\\ & C_2 & \\ 0 & & C_n\end{bmatrix}$ (21) と書ける。

更に $\mathbb{Z}=\mathbb{Q}\mathbb{Z}'$ なる置換を行ない, $C_i=\mu m_i$ なら $\mathbb{Q}^T C\mathbb{Q}=\mu\mathbb{I}$ ($\mathbb{Q}^T$は$\mathbb{Q}$のTransposed Matrix) なる事を考慮すると, $\mathbb{I}\ddot{\mathbb{Z}}'+\Lambda\mathbb{Z}'+\mu\mathbb{I}\dot{\mathbb{Z}}'=-\mathbb{Q}^T M\ddot{\mathbb{X}}_0$ 或いは $\ddot{Z}_i'+p_i^2Z_i'+\mu\dot{Z}_i=-\ddot{x}_0\sum_{s=1}^{n}e_{si}m_s\quad (i=1,2\cdots n)$ —(22) と書ける。又

$$\dot{Z}'_{i,n+1}=\dot{Z}'_{i,n}+\frac{\Delta t}{2}\ddot{Z}'_{i,n}+\frac{\Delta t}{2}\ddot{Z}_{i,n+1}\qquad Z'_{i,n+1}=Z'_{i,n}+\Delta t\dot{Z}'_{i,n}+\frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{Z}_{i,n}+\frac{(\Delta t)^2}{6}\ddot{Z}'_{i,n+1} \text{———} (23)$$

を(22)に代入して整理すると

$$\ddot{Z}_{i,n+1}=-\frac{1}{1+p_i^2\frac{(\Delta t)^2}{6}+\mu\frac{\Delta t}{2}}\left\{p_i^2Z_i'+(p_i^2\Delta t+\mu)\dot{Z}'_{i,n}+\left(p_i^2\frac{(\Delta t)^2}{3}+\mu\frac{\Delta t}{2}\right)\ddot{Z}_i'+\ddot{x}_{0,n+1}\sum_{s=1}^{n}e_{si}m_s\right\} \text{———} (24)\quad (i=1,2,3\cdots n)$$

全称にして $\ddot{\theta}_{n+1}$ も求まり

$$\ddot{\theta}_{n+1}=-\frac{1}{1-\frac{(\Delta t)^2}{6}\delta+\frac{\Delta t}{2}\frac{\bar{C}}{I_0'}}\left[\left\{\frac{(\Delta t)^2}{3}\delta-\frac{\Delta t}{2}\frac{\bar{C}}{I_0'}\right\}\ddot{\theta}_n+\left(\Delta t\delta-\frac{\bar{C}}{I_0}\right)\dot{\theta}_n+\delta\theta_n+\sum_{i=1}^{n}\left\{\xi_i Z'_{i,n}+(\Delta t\xi_i+\varphi_i)\dot{Z}'_{i,n}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left\{\frac{(\Delta t)^2}{3}\xi_i+\frac{\Delta t}{2}\varphi_i\right\}\ddot{Z}'_{i,n}+\left\{\frac{(\Delta t)^2}{6}\xi_i+\frac{\Delta t}{2}\varphi_i\right\}\ddot{Z}'_{i,n+1}\right\}+\frac{C}{I_0'}\right] \text{———} (25)$$

ただし $\delta=\frac{1}{I_0'}\left\{\sum_{j=1}^{r}A_jp_j-B\right\}$ $\xi_i=\frac{1}{I_0'}\left\{3\sum_{j=1}^{n}e_{ij}\sum_{s=1}^{n}p_{sj}(s-0.5)\lambda-\sum_{j=1}^{r}A_je_{ij}\right\}$, $\varphi_i=\frac{1}{I_0'}\sum_{j=1}^{n}\bar{C}_je_{ij}(j-0.5)\lambda$

以上の諸式により応答変位, 加速度が逐次求められる.