

構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について

京都大学工学部 正会員 後藤尚男 正会員 ○亀田弘行

1. まえがき 構造物に作用する外力のうち地震力、風力などは時間的に不規則に変化するものであり、確定関数として表わすことが困難である。このような不規則外力に対する構造物の強度を判定するためには、問題となる応答量が定められた許容値を超えない確率、すなわち確率分布を知ることが重要である。本研究では、不規則外力に対する構造物の最大応答の確率分布を取り扱ったが、この問題を厳密に解くことには種々の困難があって、この方面の研究はあまり多くはなされていない。現在までに、*random walk*の理論を応用したもの<sup>1)</sup>、求める確率分布の上・下界を示したもの<sup>2)</sup>、ある時刻での応答が過去の応答特性に影響されないとして解析を行なったもの<sup>3), 4)</sup>などがある。これらはいずれも近似的な取扱ひであるが、扱ひうる応答量が特殊な場合に限られていたり、近似度の検討が十分でないなどの問題が残されている。本研究の解法も一つの近似解法であるが、各時刻間での応答の相関の影響をできるだけ取り入れようとしたものである。

2. 最大応答の確率分布 線形1自由度系で表わされる構造物が時刻 $t$ で静止状態にあり、これに平均値ゼロの確率過程とみなせる地動加速度 $\ddot{z}(t)$ が作用したものとすると、この構造物の *pseudo velocity* 応答 $x(t)$ は、周知のように次式で与えられる。

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{-\rho_n \omega_n (t-t')} \sin \sqrt{1-\rho_n^2} \omega_n (t-t') \ddot{z}(t') dt' \quad \text{----- (1)}$$

ただし、 $\omega_n$ : 固有円振動数、 $\rho_n$ : 減衰定数

式(1)の $x(t)$ の $0 \leq t \leq T$ における絶対最大値 $R$ の確率分布は次式で表わされる。

$$\bar{\Phi}(R, T) = P[\max |x(t)| \leq R; 0 \leq t \leq T] \quad \text{----- (2)}$$

出生過程における基礎微分方程式を解いてその結果を式(2)に用いると次式をうる。

$$\bar{\Phi}(R, T) = P[|x(0)| \leq R] \exp \left\{ - \int_0^T C_0(R, t) dt \right\} \quad \text{----- (3)}$$

$$\text{ただし } C_0(R, t) dt = P[|x(t+dt)| > R | \max |x(t')| \leq R; 0 \leq t' \leq t] \quad \text{----- (4)}$$

式(3)は $\bar{\Phi}(R, T)$ の厳密解を与えが、式(4)の $C_0(R, t)$ を求めることが困難なためにこのままではその値を計算することができない。そこで $C_0(R, t)$ を近似的に表示することを試みる。すなわち、式(4)は連続な $t$ について満足されねばならないが、いま

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < T$$

なる有限個の時刻について同式を満足するような $\bar{C}_0(R, t)$ によって $C_0(R, t)$ を近似すると、結局 $\bar{\Phi}(R, T)$ の近似式として次式をうる。

$$\bar{\Phi}(R, T) \cong P[|x(0)| \leq R] \exp \left\{ - \int_0^T \bar{C}_0(R, t) dt \right\} \quad \text{----- (5)}$$

$$\bar{C}_0(R, t) = Q_1(R, t) / Q_2(R, t)$$

$$Q_1(R, t) = \frac{C_0}{C_c} \int_{-\frac{R}{C_c}}^{\frac{R}{C_c}} d\xi_1 \int_{-\frac{R}{C_c}}^{\frac{R}{C_c}} d\xi_2 \dots \int_{-\frac{R}{C_c}}^{\frac{R}{C_c}} d\xi_r \left\{ \int_{-\frac{R}{C_c}}^0 |\xi_c| \phi_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, -\frac{R}{C_c}, \xi_c) d\xi_c + \int_0^{\infty} \xi_c \phi_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \frac{R}{C_c}, \xi_c) d\xi_c \right\} d\xi_r \quad \text{----- (6)}$$

$$Q_2(R, t) = \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} d\zeta_1 \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} d\zeta_2 \cdots \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} d\zeta_r \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} \phi_{2n}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r, \zeta_t) d\zeta_t \quad (7)$$

ただし,  $\sigma_1^2 = E[x^2(t_i)]$ ,  $\zeta_i = x(t_i)/\sigma_1$  ( $i=1, 2, \dots, r(t)$ );  $\sigma_2^2 = E[x^2(t)]$ ,  $\zeta_t = x(t)/\sigma_2$ ;  $\sigma_0^2 = E[\tilde{x}^2(t)]$ ,  $\tilde{\zeta}_t = \tilde{x}(t)/\sigma_0$

また  $\phi_n(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r, \zeta_t)$ , および  $\phi_{2n}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r, \zeta_t)$  はそれぞれの変数の同時確率密度関数である。

3. 計算例 入力加速度  $\ddot{x}(t)$  および応答  $x(t)$  が正規定常過程とみなせる場合について数値計算を行なった。 $\ddot{x}(t)$  のパワースペクトル密度には次の形を用いた。

$$S(\omega) = \beta^2 \frac{3}{128 \omega_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \exp(-4 \frac{\omega}{\omega_0})$$

計算は  $r=0, 1, 2$  について行な, たが,  $r=1, 2$  に対する  $t_k$  は次の2通りを考えた。

case I:  $r=1$  の場合  $t-t_1 = T_n/4$

$r=2$  の場合  $t-t_1 = T_n/2$ ,  $t-t_2 = T_n/4$

case II:  $r=1$  の場合  $t-t_1 = T_n/2$

$r=2$  の場合  $t-t_1 = T_n$ ,  $t-t_2 = T_n/2$

ただし  $T_n = 2\pi/\omega_n$ : 固有周期

図-1 に case I に対する計算結果を示した。同図中で,  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ,  $r = \omega_0/\omega_n$ 。同図には, ランダム地震動を計算機上で発生させ, その最大値を読み取って求めた実験値ともあわせて示してある。また表-1 には各場合に対する  $R/\sigma_2$  の期待値を,

$$\frac{E[R]}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_2} \int_0^\infty \{1 - \Phi(R, t)\} dR$$

より算出して示した。なお, 本研究の詳細を, 京都大学防災研究所年報第11号に投稿中である。

#### 参考文献

- 1) Rosenblueth and Bustamante: Proc. ASCE, Vol. 88, EM3, Jan. 1962.
- 2) Freudenthal and Shinozuka: Trans. JSCE, No. 116, June 1965.
- 3) Dawavenport: Proc. ICE, Vol. 19, 1961.
- 4) 小松: 土木学会論文集, 142号, 昭. 42. 6.

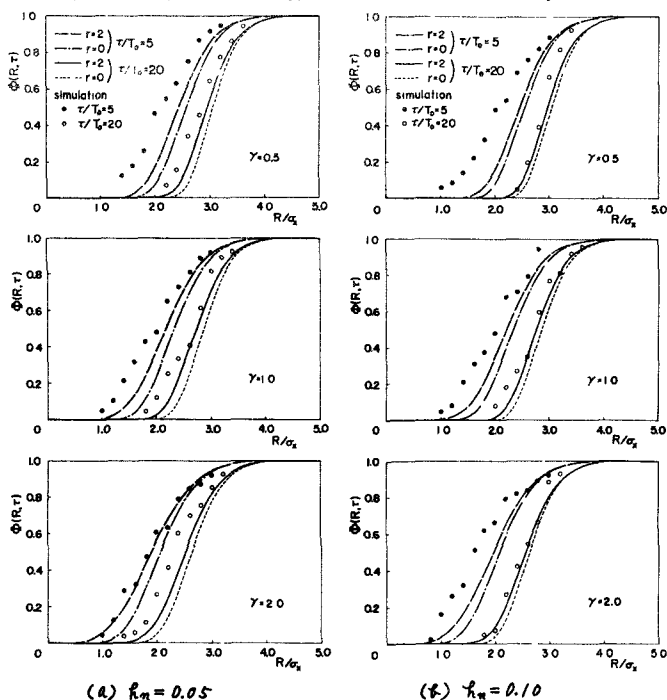


図-1 最大応答の確率分布

表-1 最大応答の期待値  $E[R]/\sigma_2$

(a)  $R_n = 0.05$

| r          | T/T₀  | 0.5   |       | 1.0   |       | 2.0   |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|            |       | 5     | 20    | 5     | 20    | 5     | 20    |
| 0          | I, II | 2.611 | 3.097 | 2.373 | 2.894 | 2.106 | 2.664 |
| 1          | I     | 2.609 | 3.096 | 2.334 | 2.866 | 2.093 | 2.647 |
|            | II    | 2.472 | 2.999 | 2.228 | 2.767 | 2.017 | 2.581 |
| 2          | I     | 2.472 | 2.993 | 2.198 | 2.768 | 1.936 | 2.550 |
|            | II    | 2.450 | 2.980 | 2.215 | 2.758 | 2.003 | 2.559 |
| simulation |       | 2.187 | 2.860 | 2.116 | 2.673 | 1.954 | 2.357 |

(b)  $R_n = 0.10$

| r          | T/T₀  | 0.5   |       | 1.0   |       | 2.0   |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|            |       | 5     | 20    | 5     | 20    | 5     | 20    |
| 0          | I, II | 2.585 | 3.075 | 2.392 | 2.893 | 2.124 | 2.680 |
| 1          | I     | 2.590 | 3.076 | 2.389 | 2.890 | 2.064 | 2.661 |
|            | II    | 2.472 | 3.001 | 2.261 | 2.806 | 2.071 | 2.629 |
| 2          | I     | 2.484 | 3.002 | 2.240 | 2.802 | 2.000 | 2.607 |
|            | II    | 2.468 | 2.999 | 2.256 | 2.799 | 2.064 | 2.622 |
| simulation |       | 2.188 | 2.930 | 1.956 | 2.763 | 1.730 | 2.617 |