

平面応力波による弾性板内の円孔周辺応力状態について

京都大学工学部 正会員 工博 円羽義次
 広島大学工学部 正会員 工修 佐藤 誠
 国 鉄 正会員 工修 久保 晋

緒言

筆者らは、42年度関西支部講演会において半無限弾性体内を伝播する *Supersonic wave* による板内の主応力方向の変化および板内の円孔周部の応力集中について発表した。ここではさらに円孔周部の過渡的応力状態について、M.L. BARON⁽¹⁾等によるモード解析の手法を導入し、とくに入射波の縦波部と横波部とによる応力状態に注目して究明した。

1). 解析の手法

入射波として階段状の波形をもつ平面波を仮定し、円孔周部の境界条件は円孔のない弾性板の場合の円孔に対応する位置に生ずる応力 $\hat{\sigma}_{rr}$ と $\hat{\sigma}_{r\theta}$ とをもとめ、それと逆方向の表面力を円孔周部に作用させることにより満足させるものである。したがって円孔周辺の応力は入射波による応力と、円孔周に表面力を作用させた場合の応力とを重ね合わせるにより得られる。

1-1 表面力を作用させた場合の応力

$$\text{運動方程式} \quad C_p \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \\ C_s \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

ここで $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, λ, μ は Lamé の定数であり, $\phi \Rightarrow$ 変位ポテンシャルである。

時間 t について Fourier 変換を施し、 $\hat{r}, \theta$ について変数分離の概念を導入する。とくに θ に関しては $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ で与える。解析の容易さのため表面力を Fourier 級数に展開する。

縦波の部分については

$$\hat{\sigma}_{rr}^{(1)} = \frac{1}{2} \{a_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos n\theta\}, \quad \hat{\sigma}_{r\theta}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\theta.$$

また横波の部分については

$$\hat{\sigma}_{rr}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin n\theta, \quad \hat{\sigma}_{r\theta}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \cos n\theta.$$

で示される。ここで () 内の添字 (1), (2) は以下で縦波入射および横波入射を示すものとする。

その結果、表面力は次の5種類の場合にわけられ、その場合の解をそれぞれ示すものと、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rrn} &= U(t) \cos n\theta, \quad \hat{\sigma}_{r\theta n} = 0; & \hat{\sigma}_{ijn}^{**} \\ \hat{\sigma}_{rrn} &= 0, \quad \hat{\sigma}_{r\theta n} = U(t) \sin n\theta; & \hat{\sigma}_{ijn}^{**} \\ \hat{\sigma}_{rrn} &= U(t), \quad \hat{\sigma}_{r\theta n} = 0; & \hat{\sigma}_{ijn}^{**} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rrn} &= U(t) \sin n\theta, \quad \hat{\sigma}_{r\theta n} = 0; & \hat{\sigma}_{ijn}^{**} \\ \hat{\sigma}_{rrn} &= 0, \quad \hat{\sigma}_{r\theta n} = U(t) \cos n\theta; & \hat{\sigma}_{ijn}^{**} \end{aligned}$$

ただし * 印のついた応力は (r, θ) の n の関数である。 i, j は r, θ を示すテンソル記号であ

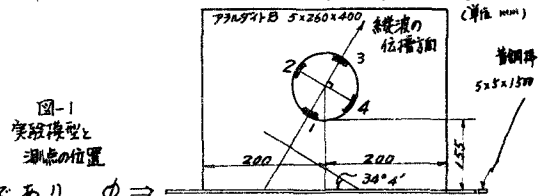


図-1
実験模型と
測点の位置

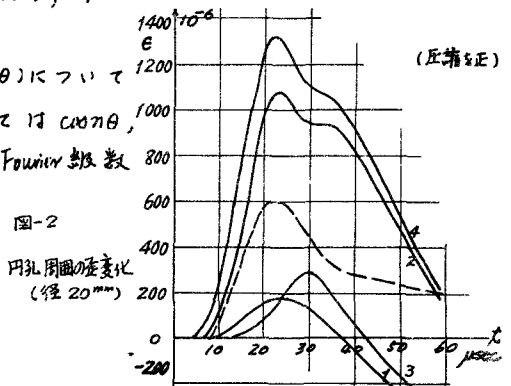


図-2

円孔周部の
応力変化
(径 20mm)

る。

上記(2), (3)の表面力が作用する場合の解は

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\sigma}_{ijn}^{(1)} + \bar{\sigma}_{ijn}^{(1)}) \cos n\theta, & (i=j) \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\sigma}_{ijn}^{(1)} + \bar{\sigma}_{ijn}^{(1)}) \sin n\theta, & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\sigma}_{ijn}^{(2)} + \bar{\sigma}_{ijn}^{(2)}) \sin n\theta, & (i=j) \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\sigma}_{ijn}^{(2)} + \bar{\sigma}_{ijn}^{(2)}) \cos n\theta, & (i \neq j) \end{cases}$$

で与えられる。

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ijn}^{(1)} &= \int_0^{\pi} \bar{a}_n(\tau) \bar{\sigma}_{ijn}^{*}(t-\tau) d\tau, & \bar{\sigma}_{ijn}^{(2)} &= \int_0^{\pi} \bar{c}_n(\tau) \bar{\sigma}_{ijn}^{*}(t-\tau) d\tau, \\ \bar{\sigma}_{ijn}^{(1)} &= \int_0^{\pi} \bar{b}_n(\tau) \bar{\sigma}_{ijn}^{*}(t-\tau) d\tau, & \bar{\sigma}_{ijn}^{(2)} &= \int_0^{\pi} \bar{d}_n(\tau) \bar{\sigma}_{ijn}^{*}(t-\tau) d\tau, \\ \bar{\sigma}_{ij0}^{(1)} &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \bar{a}_0(\tau) \bar{\sigma}_{ij0}^{*}(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

“.” は τ についての微分係数を示す。

手取一般には任意の波形 $F(t)$ の波が入射する

場合の応力は、 $\bar{\sigma}_{ij}^{(1)} = F(t) \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + \int_0^{\pi} F(\tau) \bar{\sigma}_{ij}^{(1)}(t-\tau) d\tau$, 図-3 応力分布の時間変化 (径 20mm)

($i=1, 2$) で与えられる。

2). 実験概要 42年度関西学会講演概要に示したものと同様である。図-1に実験模型を示す。円孔径は 20, 30mm とした。

3). 実験結果および考察 図-2は、図-1に示される測点における歪 E_{00} を示したものである。同図において破線で示した曲線は円孔のない板内を伝播する応力波の最大主歪を示したものである。これから入射波の波長は約 10cm であることがわかる。2, 4の測点において約 2.5~3 倍の応力集中を生じている。また 1, 3の曲線は約 2.5μsec の間圧縮を生じている。

図-3は測点附近の超音波弾性写真から読みとった円孔周の応力分布を示したものである。縦波が円孔部に達しているとこの応力分布と横波が円孔部に到達しているときとは異なっている。縦波の場合、波の伝播方向に最小の応力を、それと直交する部分で最大の応力を生じる。一方横波の場合、伝播方向と 45° の部分で最大および最小となることがわかる。板内を伝播する応力波の主応力方向ともほぼ一致している。本実験のような波形の入射波が通過する場合、最大応力を生ずる位置は必ずしも円孔中心に好む位置ではない。径が小さくするとその傾向が著しくなる傾向を示す。最小応力についてはそれほどかたよる傾向は中心に好む傾向である。

本実験に用いた程度の入射波の波長と径との比では、応力分布について 20 と 30mm とではほとんど差異がみられない。横波がある角度以上の入射角をもって円孔周に入射すると Rayleigh 波を生じることが分っている。しかしその波の影響と考えられるものは明確にあらわれていない。実験の精度にも関係するが、今後は円孔の径の大きい場合について検討してみることが必要である。

現在前述の理論式をもとに計算をすすめている段階で、先日その結果も発表する予定。

参考文献 1) M.L. EILON, A.T. MATTHEWS,

"Diffraction of a Pressure wave by a Cylindrical Cavity in an Elastic medium" Jour of App Mech. Vol. 21, pp 341-354.

