IV ～ 13

# 会場内の流動に関する確率論的考察

京都大学工学部　正員　○飯田恭敬
同　　　　学生員　今坂一郎

## 1　まえがき

会場内のあるゾーンについての流動客を眺めてみると，そのゾーンを目的地にもつものと，そこを通過するものの２つに分けることができよう。本研究ではこれらを確率論的に取扱い場内各ゾーンの流動客がどのように分布するかについて考察したものである。もちろんこの場合，入口，出口の流動を含めたモデルを作成するのが本来であるが取扱いが面倒になるので，ここでは入口，出口を一応除外しており，場内の流動についてだけ論じるものである。

## 2　会場内ODパターン

入場者によって発生せられる総トリップ数Tがわかっているとする。これを場内ODにわりかけるのであるが，いまある１人をとりだしたとき，この人がゾーン$i$からゾーン$j$に行く先験的な確率$p'_{ij}$は次式であらわせる。

$$p'_{ij} = \alpha p_i c_j t_{ij}^{-\gamma} \tag{1}$$

ここに $p_i$；ゾーン$i$の相対的トリップ発生力，$c_j$；ゾーン$j$の相対的魅力度（投資額の相対的な割合としてもよい），$t_{ij}$；ゾーン$i$, $j$間の距離，$\alpha$，$\gamma$；定数

さてODトリップ数が$\{x_{ij}\}$となるようなパターンの生起確率は次のようになる。

$$P = \frac{T!}{\prod_{ij}(x_{ij}!)} \prod_{ij}(p'_{ij})^{x_{ij}} \tag{2}$$

このときゾーン$i$にいる人が次にゾーン$j$に行く確率を$p_{ij}$とすると，$x_{ij}$が充分大きいとき，$x_{ij} = T p_i p_{ij}$が成立する。この$p_i p_{ij}$はさきほどの先験確率$p'_{ij}$に対し実現確率という。スターリングの公式を使い，(2)の対数をとり定数となる項を除いて整理すると次のようになる。

$$R = -\sum_i \sum_j p_i p_{ij} \log p_{ij} - \gamma \sum_i \sum_j p_i p_{ij} \log t_{ij} + \sum_j p_j \log c_j = H - \gamma \overline{\log t} + \overline{\log C} \tag{3}$$

これを最大にする$\{p_i p_{ij}\}$が確率的に最も起こりやすいパターンになるが，このとき$p_i p_{ij}$の満たすべき条件は次のとおりである。

$$\sum_i p_i p_{ij} = p_j, \quad \sum_j p_{ij} = 1, \quad \sum_i p_i = 1 \tag{4}$$

これを解くためラグランジュ方程式を作る。

$$F = H - \gamma \overline{\log t} + \overline{\log C} + \sum_j \lambda_j \left( \sum_i p_i p_{ij} - p_j \right) + \sum_i \mu_i \left( \sum_j p_{ij} - 1 \right) + \nu \left( \sum_i p_i - 1 \right) \tag{5}$$

解析的に解くのは困難なので次の式を使い収束計算により解を求める。

$$\partial F / \partial p_{ij} = -p_i (1 + \log p_{ij}) - \gamma p_i \log t_{ij} + \lambda_j p_i + \mu_i = 0 \tag{6}$$

$$\partial F / \partial p_i = -\sum_j p_{ij} \log p_{ij} - \gamma \sum_j p_{ij} \log t_{ij} + \log c_j + \sum_j \lambda_j p_{ij} - \lambda_i + \nu = 0 \tag{7}$$

$\partial F / \partial \lambda_j$，$\partial F / \partial \mu_i$，$\partial F / \partial \nu$はそれぞれ(4)に対応している。

(7)より

$$\nu = -(H - \gamma\,\overline{\log t} + \overline{\log C}) \tag{8}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 p_1(p_{11}-1) + \lambda_2 p_1 p_{12} + \cdots\cdots + \lambda_n p_1 p_{1n} + p_1 \log c_1 - \sum_j p_1 p_{1j} \log p_{1j} - \gamma \sum_j p_1 p_{1j} \log t_{1j} + p_1 \nu = 0 \\ \lambda_1 p_2 p_{21} + \lambda_2 p_2(p_{22}-1) + \cdots\cdots + \lambda_n p_2 p_{2n} + p_2 \log c_2 - \sum_j p_2 p_{2j} \log p_{2j} - \gamma \sum_j p_2 p_{2j} \log t_{2j} + p_2 \nu = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 p_n p_{n1} + \lambda_2 p_n p_{n2} + \cdots\cdots + \lambda_n p_n(p_{nn}-1) + p_n \log c_n - \sum_j p_n p_{nj} \log p_{nj} - \gamma \sum_j p_n p_{nj} \log t_{nj} + p_n \nu = 0 \end{cases} \tag{9}$$

(6)より

$$p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_n\lambda_n - 1 + H - \gamma\,\overline{\log t} + \sum_i \sum_j \mu_i p_{ij} = 0 \tag{10}$$

また(6)と $\sum_i p_i p_{ij} = p_j$ より

$$p_{ij} = e \cdot t_{ij}^{\gamma} \cdot \exp(\lambda_j) \cdot \exp(\mu_i / p_i) \tag{11}$$

$$\exp(\mu_i / p_i) = e \,/\, \{\sum_j t_{ij}^{\gamma} \exp(\lambda_j)\} \tag{12}$$

収束計算は次の手順で行なう。

①まず(12)で $\lambda_j$ を仮定し $\exp(\mu_i/p_i)$ を求める。②これから(11)を使って $p_{ij}$ が求まる。③条件式(4)から $p_i$ が得られる。④ $p_i$ がわかったから $\exp(\mu_i/p_i)$ の値から $\mu_i$ が求まる。⑤上で求めた $p_i, p_{ij}, \mu_i$ より(9),(10)を使って $\lambda_j$ を求める。このとき(10)は階数が1つ下がるので任意のどれか1つの式をとりのぞき代りに(9)を入れる。⑥再び②にもどり以上の操作をくりかえす。⑦ $p_i, p_{ij}$ の値が一定値になるまで計算を行なう。

こうして $c_j$, $t_{ij}$ を既知の要因としてODパターンが決定できる。

3、通過トリップ数

上で求まったODトリップを各隣接ゾーンを順次連結してできあがっている会場道路網にこれを流してやり、そのときルート表なるものを右図のように作成する。このルート表は通過するもののみについてだけ表記しており、たとえばODが $i$ $j$ のものがゾーン $k$ を通過すれば1と記入し、その単位トリップ数は $p_i p_{ij}$ である。このルート表について縦に合計をとるということはそのゾーンの単位通過トリップ数をあらわしており、$j$ ゾーンでは $p_j^*$ とあらわす。

| OD＼ゾーン | 1 | 2 | … | j | … | n | 単位ODトリップ数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1−2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $p_1 p_{12}$ |
| 1−3 | | 1 | 1 | | 1 | 1 | $p_1 p_{13}$ |
| ⋮ | | | | | | | |
| 1−n | | 1 | 1 | 1 | 1 | | $p_1 p_{1n}$ |
| ⋮ | | | | | | | |
| i−j | 1 | 1 | | 1 | 1 | | $p_i p_{ij}$ |
| n−(n−1) | | | 1 | 1 | 1 | | $p_n p_{nj}$ |
| 単位通過トリップ | | | | $p_j^*$ | | | |

4　流動客分布

ゾーン $j$ の単位流動トリップ数 $q_j$ は、そこを目的地にもつものと通過するものの合計であるから次式でかける。

$$q_j = \sum_i p_i p_{ij} + p_j^* = p_j + p_j^* \tag{13}$$

したがってゾーン $j$ の流動客 $Q_j$ はこれに総トリップ数 $T$ を乗じればよいから

$$Q_j = T(p_j + p_j^*) \tag{14}$$

5　あとがき

残された問題は入口，出口の流動をいかにこのモデルに組入れるかであり，今後はこれに努めたい。