Ⅳ ～ 3

変換ネットワークに関する一考察

大阪市立大学工学部　正員　西村　昂

1. まえがき

ネットワークは数種の要素の集合よりなっている。いまこれらの要素の間(内部)で、ある要素と他の要素との間に1対1の対応が成り立つように変換した結果得られるネットワークをもとのネットワークに対する変換ネットワーク(*transformed network*)と呼ぶことにする。ネットワークに関する種々の問題をとり扱う上において変換ネットワークを利用することによって解析が容易になる場合がある。ここでは変換のうちでも回帰的な変換である双対変換、三対変換について主として考えてみたい。

2. 変換ネットワークの種類

ネットワーク $G=(N,A,P)$ は3種の要素の集合すなわちノード，アークおよび多角形(面)の集合 N, A, P よりなっている2次元複体と考える。要素 $X_1, X_2 \cdots$ を要素 $Y_1, Y_2 \cdots$ に変換することを変換行列 $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots \\ Y_1 & Y_2 & \cdots \end{pmatrix}$ なる記号で表わす。また変換 $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots \\ Y_1 & Y_2 & \cdots \end{pmatrix}$ を行なったあとで $Y_1, Y_2 \cdots$ を $Z_1, Z_2 \cdots$ に変換することを、$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots \\ Y_1 & Y_2 & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots \\ Z_1 & Z_2 & \cdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots \\ Z_1 & Z_2 & \cdots \end{pmatrix}$ と書くことにする。

変換ネットワークにはいくつかの種類が考えられる。第1はネットワークを単純化するために要素の数を減ずるもので、ある観点たとえば容量からみて同等なものを作るものである(*network simplification, equivalent transformation*)。Fig.1 にその例を示す。第2はある目的にかなったネットワークに変換するために要素を他の要素に変換するものであり、たとえ

(a)　(b)　(c)

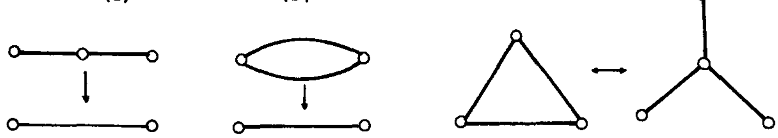


Fig. 1

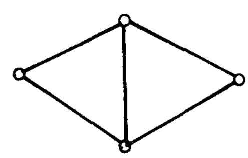


Fig. 2

ば $\begin{pmatrix} PAN \\ NAP \end{pmatrix}$ なる変換を Fig.2 のネットワークに対して行なうと Fig.3 が得られる。第3は第2の変換の後同じ変換をさらにくり返しておこなうともとのネットワークに帰ってくるような回帰的な変換である。2度くり返してもとに帰る場合を双対変換という。また3度くり返してもとに帰る場合は三対変換といわれる。

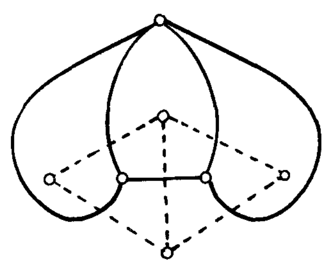


Fig. 3

3. 双対変換

変換行列 $\begin{pmatrix} PNA \\ NPA \end{pmatrix}$ で表わされる変換の結果得られるネットワークは1つの双対ネットワーク(*dual network*)である。これはすべての面はノードに、すべてのノードは面に変換している。この変換を2度くり返すともとにもどる。$\begin{pmatrix} PNA \\ NPA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} PNA \\ NPA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PNA \\ PNA \end{pmatrix}$。この性質は双対性(*duality*)に基づくものである。これらは Fig.3 に示すような相互関係にある。点線のネットワークに対する双対ネットワークを実線で示している。図よりわかるように双対ネット

ワークはもとのネットワークのすべての面を連結するものであり、またすべてのアークを横断する新しいアークによって構成されている。このことからアークの横断情報(アークを横断するときに得られるアークの情報でたとえばアークの容量とかフローなど)と面に関する情報によって問題の目的関数が定式化されている場合には、その双対ネットワーク上において解く方が有利となる場合があるであろう。1例として最小カットの問題を考えれば、目的関数であるカットはアークの容量の和で表わされている。またカットはフローを切断するための連続したアークの集合であるから、双対ネットワーク上ではパス(道)となる。したがって最小カット問題は双対ネットワーク上の最短路問題に変換される。[1]

4. 三対変換

同じ変換を3回くりかえしてもとに帰る回帰的な変換が成り立つ性質を三対性(*triality*)という。筆者はこの言葉を文献2ではじめて知った。変換行列$\begin{pmatrix}APN\\NAP\end{pmatrix}$で表わされる変換を3回くりかえすともとのネットワークに帰るのでこれは三対変換である。この変換$\begin{pmatrix}APN\\NAP\end{pmatrix}$をFig.2のネットワーク$G_1$に対して行なうとFig.4のネットワーク$G_2$が得られる。変換手順は

(1) アークの中心に1つのノードをとる。

(2) 次に面をアークに変換するので、面の中心に擬似ノード(*pseudo node*)を考え、それよりその面の周をなすアーク上にとったノードまでのびるアークをえがく。*pseudo node*を中心にもつアーク群を擬似アーク(*pseudo arc*)と呼ぶことにする。

(3) その結果ノードは面に変換される。

この変換ではしたがって、アークはノードに、面は擬似アークにまたノードは面に変換されたことになる。同様にG_2に変換$\begin{pmatrix}APN\\NAP\end{pmatrix}$を行なうとFig.5に示すネットワーク$G_3$が得られる。擬似アークをノードに変換する場合は擬似ノードをそのまゝノードにとる。面を擬似アークにする場合の中心の擬似ノードにはもとのネットワークのノードがとられる。この変換をもう一度行なうとFig.6となってもとのネットワークG_1に帰る。もとのネットワークにおいてアークがその中心に擬似ノードを持っていると考え、アークはすべて擬似アークであると考えるとこの変換はより明確となる。これら3つのネットワークを重ねて描くとFig.7となり、位相幾何でいう重心細分となっていることがわかる。

この変換の逆方向の変換すなわち$\begin{pmatrix}PNA\\NAP\end{pmatrix}$も実行可能であり、逆にFig.6, Fig 5, Fig 4のようになる。ここで三対変換でできた2つのネットワークG_2, G_3について考えてみたい。G_2はG_1のアークと面のみを通っており、双対変換における双対ネットワークと類似の機能を持つことが想像され

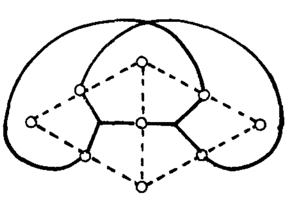


Fig. 4

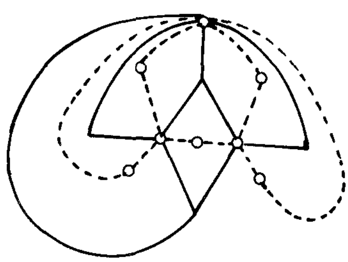


Fig. 5

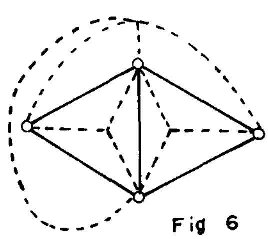


Fig 6

る。またG_3はG_1のノードと面のみを通るので、目的関数がノードか面あるいはその両方を変数として定式化されている場合には検討してみるのもよいであろう。

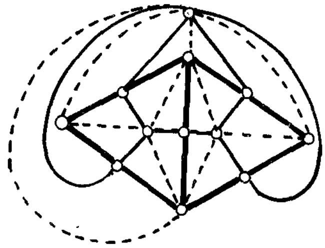
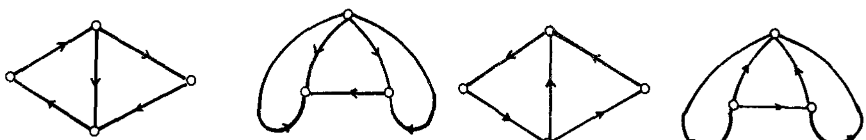


Fig. 7

5. その他の回帰的変換

回帰的変換にはさらに高次のものも考えられるが、有向ネットワークにおいて変換ネットワークのアークの向きをきめる規則をたとえばもとのアークの矢頭からみて時計方向にまわって近い方を矢頭とする（あるいはその逆）のようにきめる。このような規則によって$\binom{PAN}{NAP}$変換を行なう。この変換は3.で述べた双対変換と同じであるが、2回の変換でできるネットワークはグラフとしては同じものであるがアークの向きの全く逆のものになる。したがってもとに帰るためにはさらに2回の変換を必要とし、四対変換となる。この例をFig.8に示す。



(a) (b) (c) (d)

Fig. 8

6. あとがき

これまで述べてきた変換においてでてきた各ネットワークについてオイラー標数E(G)をみるとすべて2に保たれている。これはすべてのネットワークが凸多面体であると考えた場合で球面上に描かれたグラフに相当する。ただし三対変換で考えた擬似ノード、擬似アークなどはすべて独立のノード、アークとして計算する。

オイラー標数 $E(G) = n - a + p$

ネットワーク	n (ノード)	a (アーク)	p (面)	E(G)	備考
Fig. 2	4	5	3	2	} 双対変換
Fig. 3	3	5	4	2	
Fig. 4	8 (3)	10	4	2	} 三対変換 ( )は擬似ノード
Fig. 5	7 (4)	10	5	2	
Fig. 6	9 (5)	10	3	2	

ここでは主として回帰的な変換について述べたが、ここで考えたのは1例でまだ他にあるかも知れない。このような変換ネットワークはまだ有効に利用されていないかも知れないが、有効な変換はもっと開発されるべきであろう。

参考文献

1. S.B. Akers, Jr., "The Use of Wye-delta Transformation in Network Simplification" Opns. Res vol. 8 no. 3 pp. 311–323 (1960)
2. 高橋秀俊，「双対性をめぐって(6) — 双対性とは何か」 自然 vol. 20 no. 12 pp. 46–50 (1965).