ネットワークの容量に関する一考察

大阪市立大学工学部　正員　西村 昂
大阪市立大学大学院　学生員　○中村正治

1、まえがき

本文は道路網の容量を推定するために、ネットワークの最大フローの問題からアプローチしようとするものである。ネットワーク・フローの問題では、ODパターンを考えずにどのような方向のフローであろうと無限に需要がある場合と、ODパターンをもった需要を考える場合とがある。前者は single-commodity の多端点フローの問題として、後者は、multi-commodity の場合の問題として考えられる。

ここでは、single-commodity の場合の問題のみを考えることにしたい。

2、ネットワークの容量

ネットワークの最大フロー問題において、多端点フローの最大フロー問題は、仮想始節点 s と仮想終節点 t を設け、s, t と供給ノード、需要ノードをそれぞれ結ぶ仮想アークを付加することによってネットワークを拡大し、s から t への2端点フロー問題に変換することができる。さらに、最大フロー最小カット定理によって、s と t を分離する最小カットを求めれば、最大フローを求めることができる[1]。よって、ここでは、ノードの容量が∞の場合と、有限の場合とに分け、それぞれの場合についての最小カットを求め、ネットワークの容量を求めることにする。

2.1、ノードの容量が無限の場合

Fig.1のようなひとつのネットワーク $G(N;A)$ を考え、各ノードは、発生および吸収の両機能を併せもつものとする。Fig.1において、ノード n_i からノード n_j へのアーク (n_i, n_j) の容量を $c(n_i, n_j)$ とし、アークに添えて書くことにする。

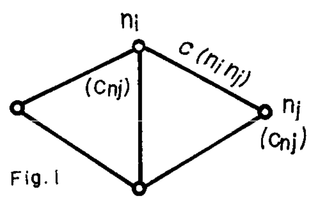


Fig.1

ネットワークの拡大に際し、次の手続きを行なう。

1つのノード n_i で発生しかつ吸収されてしまうフローを防ぐために、Fig.2(a)のノード n_i で(b)のようなノード内アークを設定し、ノードの容量 C_{ni} をノード内アークの容量で代表させる。

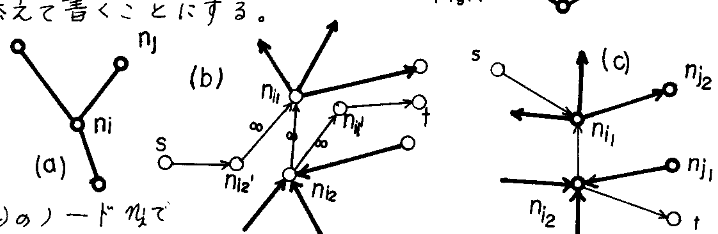


Fig.2

この場合、ノード容量が無限であるから、(b)図のノード内アークはすべて∞である。それゆえ、(c)のように1本のノード内アークで代表することができる。Fig.3に、この表わし方によって拡大されたネットワーク $G^*(N^*;A^*)$ を示す。ただし、図において、

$$C^*(s, n_{i1}) = \infty \qquad n_{i1} \in N^* \tag{1}$$

$$C^*(n_{i2}, t) = \infty \qquad n_{i2} \in N^* \tag{2}$$

$$C^*(n_{i2}, n_{i1}) = \infty \qquad (n_{i2}, n_{i1}) \in A^* \qquad (3)$$

$$C^*(n_{i1}, n_{j2}) = C(n_i, n_j) \qquad (n_{i1}, n_{j2}) \in A^*,\ (n_i, n_j) \in A \qquad (4)$$

この場合の、sとtを分離する最小カットを求める。任意のアーク(n_{i1}, n_{j2})を含むカットがあるとすると、G^*において、(s, n_{i1}, n_{j2}, t)なるパスが存在し、sとtを分離するカットとはならない。したがって、最小カットはすべてのアークを含まねばならない。(ただし、Fig.4のように、アーク(n_i, n_j)の中間に通過量のみを通すような中間ノードn_kが存在する場合には、(n_i, n_k)と(n_k, n_j)のいずれか一方をカットすれば、n_iとn_jを分離できる。よって、sとtを分離する最小カットに含めるのは、min[C(n_i, n_k), C(n_k, n_j)]なるアークである。) ネットワークG^*における、sとtを分離する最小カットを$K^*(s,t)$とし、そのカット容量を$\mathbb{C}^*(s,t)$とすれば、

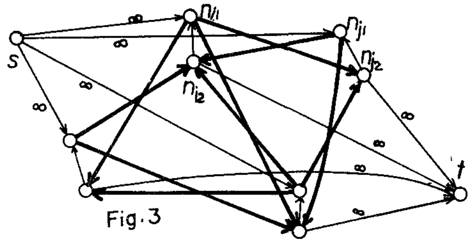


Fig.3

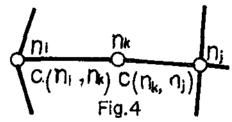


Fig.4

$$\mathbb{C}^*(s,t) = \sum_{(n_{i1}, n_{j2}) \in K^*(s,t)} C^*(n_{i1}, n_{j2}) \qquad (5)$$

となり、この式を元のネットワークGの式に変換すると、最大フローFは次式になる。

$$F = \mathbb{C} = \sum_{(n_i, n_j) \in A} C(n_i, n_j) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{ただし、}\mathbb{C}\text{は}G\text{のカット値} \\ \because\ K^*(s,t) = A\end{array}\right) \qquad (6)$$

2.2. ノードの容量が有限の場合

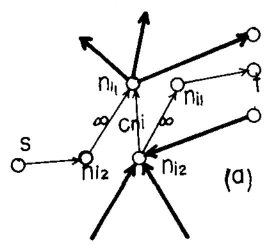
ノードの容量の影響を受けるものには、通過するフローと発生および吸収フローがある。ここでは、ノードを通過するフローのみがノード容量の制限を受け、発生・吸収フローはノード容量の制限を受けない場合と、発生、吸収量もノード容量の制限を受ける場合について、ネットワークの最大フローを考える。

2.2.1. 通過フローのみがノード容量の制限を受ける場合

ノード容量をC_{ni}とすると、ノードn_iはFig.5(a)のように変換され、(b)のように表わすことができる。ネットワークGはFig.3と同じようなネットワークG^*に拡大される。ただし、Fig.3のネットワークの条件式(3)が

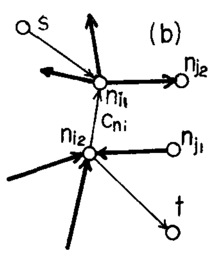
$$C(n_{i2}, n_{i1}) = C_{ni} \qquad (7)$$

に変えられる。したがって条件式は、(1),(2),(7),(4)となる。



(a)

Fig. 5



(b)

この場合も2.1.と同じく、任意の1アーク(n_{i1}, n_{j2})を含まないカットがあるとすれば、s, tを結ぶパス(s, n_{i1}, n_{j2}, t)が存在し、カットでなくなる。よって、Gの最小カット容量$\mathbb{C}$はすべてのアークの容量を加えたものとなる。よって、最大フローFは

$$F = \mathbb{C} = \sum_{(n_i, n_j) \in A} C(n_i, n_j) \qquad (8)$$

2.2.2. 発生および吸収量もノード容量の制限を受ける場合

発生、吸収量をノード容量と関係づけるため、Fig.6(a)のように変換する。ここに(3)式

は、 $C^*(n_{i2}', n_{i1}) = C_{ni}$ (9)

$C^*(n_{i2}, n_{i1}) = C_{ni}$ (10)

$C^*(n_{i2}, n_{i1}') = C_{ni}$ (11)

となり、(9)式は発生量、(10)式は通過量、(11)式は吸収量にそれぞれ制限を与えている。ただし、これらのアークは常に、 $C_{ni} = \min[C^*(n_{i2}', n_{i1}), C^*(n_{i2}, n_{i1}), C^*(n_{i2}, n_{i1}')]$ (12)

であるような同時性をもつと考える。それゆえ、どれか1本のノード内アークがカットに含まれていれば、他の2本も自ずから含まれるものと考える。いま、簡便にするため、Fig. 6(a)における、3本のノード内アークをFig. 6(b)における、点線のアーク(n_{i2}, n_{i1})によって代表させる。つまり、点線のアークはsからtへの直接のパスのみ許さないためのものである。この表わし方を用いて拡大したネットワークG^*をFig. 7に示す。この場合、sとtを分離するカットは、次の3通りの場合がある。

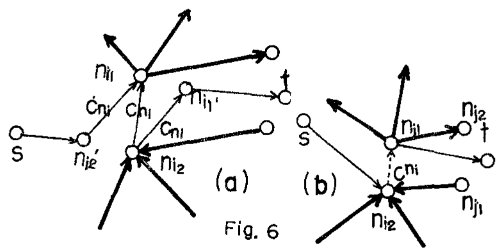


Fig. 6

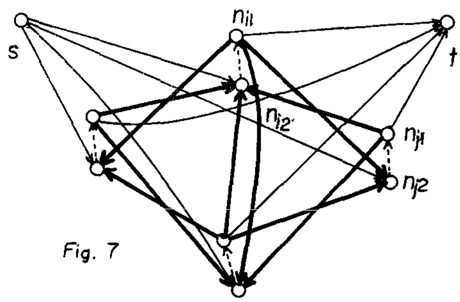


Fig. 7

1) アークだけでカットが構成される場合

アークを1本でも含まないカットがあるとするとsからtへのパスが必ずひとつ生ずる。よって、この場合の、sとtを分離する最小カットの容量は、

$$\mathbb{C}^*(s, t) = \sum_{(n_{i1}, n_{j2}) \in K^*(s,t)} C^*(n_{i1}, n_{j2}). \quad (13)$$

となり、元のネットワークGに変換すると、最小カットを$\mathbb{C}_1$とおけば(14)式を得る。

$$\mathbb{C}_1 = \sum_{(n_i, n_j) \in A} C(n_i, n_j). \quad (14)$$

2) ノード内アークだけでカットが構成される場合

Fig. 7において、ひとつのノード内アークを残すとき、そのノードと隣接しているノード内アークをカットすればフローは生じない。G^*においてカットされたノード内アークをもつ、Gのノードの集合をX、G^*のカットされないノード内アークをもつ、Gのノードの集合を$\bar{X}$で表わすとすれば、アーク(n_{i1}, n_{j2})には、$n_i \in \bar{X}$, $n_j \in \bar{X}$のときのみ(n_{i1}, n_{j2})を通るフローが存在し、その時に限る。たとえば、Fig. 8において、カットされるノードを×印で、カットされないノードを○印で表わすと、隣接ノードの組合わせは(a),(b),(c),(d)の4通りでき、(a)の場合のみフローが流れうる。

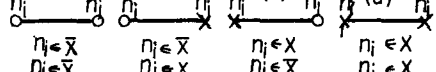


Fig. 8

$n_i \in \bar{X}$かつ$n_j \in \bar{X}$を満足するアーク(n_{i1}, n_{j2})を含まないような分割($X, \bar{X}$)はsとtを分離するカットである。(ここに、$X + \bar{X} = N$) そのカットの容量を$K(X, \bar{X})$で表わすと、

$$K(X, \bar{X}) = \sum_{n_i \in X} C_{ni} \quad (15)$$

となり、この場合、元のネットワークGに変換すると、最小カット$\mathbb{C}_2$は(16)式となる。

$$\mathbb{C}_2 = \min \sum_{n_i \in X} C_{ni} \quad (16)$$

3) ノード内アークとアークの組合わせによりカットが構成される場合

Gにおいて、上述のようなノードの分割（$X,\bar{X}$）と、アークを組合わせても、sとtを分離するカットが求められる。任意の分割によって、Fig. 8のアークの組合わせが生ずる。この、生じた組合わせのうち、(a)に該当するアークには、フローが生ずるため、このアークはsとtを分離するカットK'（s',t）に含まれなければならない。よって、この場合にも、$n_i\in\bar{X}$かつ$n_j\in\bar{X}$を満足するアーク（n_{i1},n_{j2}）の集合とノードの分割の集合（$X,\bar{X}$）とは、sとtとを分離するカットK'（s,t）に関して互に補である。ゆえに、カットの容量$K(X,\bar{X})$は、　$K(X,\bar{X})=\sum_{n_i\in X}C_{ni}+\sum_{n_{i1}\in\bar{X},\,n_{j2}\in\bar{X}}C^*(n_{i1},n_{j2})$で表わすことができ、この場合の最小カット容量$C^*(s',t)$は、次式で与えられる。

$$C^*(s',t)=\min\left[\sum_{n_i\in X}C_{ni}+\sum_{\substack{n_{i1}\in\bar{X}\\ n_{j2}\in\bar{X}}}c(n_{i1},n_{j2})\right] \tag{17}$$

これを、元のネットワークGに変換すると、最小カット容量$\mathbb{C}_3$は

$$\mathbb{C}_3=\min\left[\sum_{n_i\in X}C_{ni}+\sum_{\substack{n_i\in\bar{X}\\ n_j\in\bar{X}}}c(n_i,n_j)\right] \tag{18}$$

となる。したがって、この場合の最大フローFは、次式で与えられる。

$$F=\min\left[\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_3\right] \tag{19}$$

3、計算例　これまで求めてきた、最大フローをFig. 9に示されるような、簡単なネットワークを用いて計算してみたい。図中で、数字で示したものが容量である。

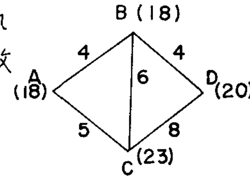


Fig. 9

1、ノード容量が∞の場合

(6)式により、　$F=\sum_{(n_i,n_j)\in A}c(n_i,n_j)=49$.

2、通過フローのみがノードの容量制限を受ける場合、

(8)式により　$F=\sum_{(n_i,n_j)\in A}c(n_i,n_j)=49$.

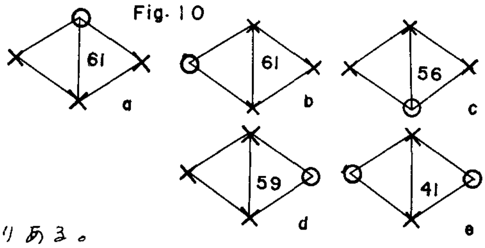
3、発生,吸収フローもノードの容量制限を受ける場合、1) カットがアークのみのとき、

(14)式により、　$\mathbb{C}_1=\sum_{(n_i,n_j)\in A}c(n_i,n_j)=49$

2) カットがノード内アークのみのとき、

カット$C(X,\bar{X})$の組合わせは、Fig. 10の5通りある。

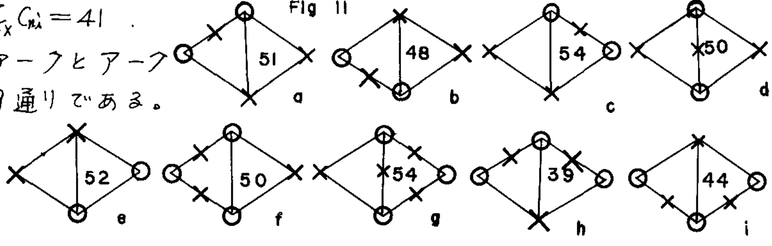
Fig. 10



(16)式より、　$\mathbb{C}_2=\min\sum_{n_i\in X}C_{ni}=41$　.

3) カットがノード内アークとアークの組合わせは、Fig. 12の9通りである。

Fig 11



(18)式より、

$\mathbb{C}_3=\min\left[\sum_{n_i\in X}C_{ni}+\sum_{\substack{n_i\in\bar{X}\\ n_j\in\bar{X}}}c(n_i,n_j)\right]=39$.

よって、この場合の最大フローは、$F=\min[\mathbb{C}_1,\ \mathbb{C}_2,\ \mathbb{C}_3]=\min[49,41,39]=39$である。

参考文献）　1) L.R. Ford & D.R. Fulkerson　：Flows in Networks, Princeton Univ. Press, 1962.