貯水池計画におけるシュミレーションについて

京都大学防災研究所　正員　長尾正志

1. まえがき

一般に，貯水池計画では，流入量標本は比較的限られた期間しかないのが普通で，それを基礎として如何に合理的に規模や操作法を決定するかが問題となる。そこで，まず，流入量分布を観測された流量系列または雨量系列のシュミレーションによって母集団の分布特性を推定するという方法がとられるが，この推定精度が計画の精度を根本的に決定するといえる。つぎに，流入量の特性は，操作法に応じて貯水量の特性に変換され，この貯水量の変動特性が，逆に，洪水を蒙った場合の危険性や利水予定量の安全性となって操作法に影響を及ぼす。そこで，本研究は，既設貯水池で操作方針を仮定した場合に，流入量系列をランダム化する方法と，それを用いて貯水量の年間における季節的な確率変動を，貯水状態の推移確率を考慮することによって推定する方法を示したものである。

2. 季節特性を考慮した流量系列のランダム化

(1) 流量系列の持続性

経年的な変動を無視すれば，われわれの行なってきた研究では，日総流量系列に基づいたコレログラムの計算では，特定地点の自己相関係数は季節ごとにほぼ同じ低減特性をすることが知られている[1]。つぎに，重複しないでとった j 日間総流量の自己相関係数は，日総流量のそれを $\varphi_1(\tau)$ として，次式で与えられる。ただし τ は時間間隔である。

$$\begin{aligned}\varphi_j(\tau) = \{ & \varphi_1(j\tau-j+1) + 2\varphi_1(j\tau-j+2) + \cdots + (j-1)\varphi_1(j\tau-1) + j\varphi_1(j\tau) \\ & + (j-1)\varphi_1(j\tau+1) + \cdots \qquad + 2\varphi_1(j\tau+j-2) + \varphi_1(j\tau+j-1)\} \\ & \times \left[j + 2\{(j-1)\varphi_1(1) + (j-2)\varphi_1(2) + \cdot \qquad + \varphi_1(j-1)\}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

この $\varphi_j(\tau)$ を実測の資料より計算してみると，j および τ が 1 ～ 2 週間程度以内では，ほぼ指数関数的に減少しているようで，これをたとえば第Ⅰ季について次式のように表わす。

$$\varphi_j^{(I)}(\tau) = \exp\{-\alpha_j^{(I)}|\tau|\}\ ,\quad [\,\alpha_j^{(I)}: \text{第Ⅰ季},\ j\ \text{日間間隔で定まる定数}\,] \tag{2}$$

(2) 標本期間の選定

前述の (2) 式のように，自己相関係数が指数関数で表現できる場合には，線型予測理論により，予測限界は次式で得られている[1]。

$$p_j^{(I)} = -\log_e(1-\sigma_a^2)/2\alpha_j^{(I)}\ ,\qquad \sigma_a: \text{許容誤差} \tag{3}$$

したがって，j 日を単位期間とし，(1)，(2) 式で求めた $\alpha_j^{(I)}$ を使ってある許容誤差 σ_a の下で (3)式より予測限界 $p_j^{(I)}$ を求め，それが単位期間 j より小さくなれば予測は意味を失なう。つまり，そのような下限 j を $j_c^{(I)}$ とすれば，$j_c^{(I)}$ 日間総流量は互いに独立となりランダム化されたことになる。そこで，年間の流量時系列を，季節ごとに，その間の総流量がランダム過程とみなせるような単位期間 $j_c^{(I)}$ ごとに分割し，その総流量を標本として用いる。

3. 貯水池貯水量の確率的変化

以上のようにして得られた総流量を標本として，季節ごとに求めた確率分布をもとにして貯水量の確率的変動を求めてみよう。こうした問題に対して，流入量分布が定常の場合には Moran によって解かれている[2]ので，ここでは季節的に分布が異なる場合を考察する。

(1) 仮定

計算に先立ってつぎの仮定をおく。

i) 流入量　第I季の期間 $(n, n+1)$, $(n=0,1,2,\cdots,n_I)$ での貯水池への総流入量を $X_n^{(I)}$ とし, $X_0^{(I)}, X_1^{(I)}, \cdots$ は互いに独立,かつつぎのような同じ分布型をもつ。

$$P_r\{X_n^{(I)}=j\} = g_j^{(I)}, \quad [\, j=0,1,2,\cdots \,] \tag{4}$$

ii) 貯水量　貯水池容量を k, $Z_n^{(I)}$ を $X_n^{(I)}$ が貯水池に流入する前の時点における貯水量とする。

iii) 放流量　一定の規定放流量を m とする。

(2) 貯水量の推移確率

以上の仮定によって, $n+1$ 時点における貯水量は次式で与えられる。

$$Z_{n+1}^{(I)} = \min(k, Z_n^{(I)}+X_n^{(I)}) - \min(m, Z_n^{(I)}+X_n^{(I)}), \quad [\, n=0,1,2,\cdots \,] \tag{5}$$

よって, $\{Z_n^{(I)}\}$ は単純マルコフ連鎖を構成していることがわかる。ベクトル的な表示を用いて,第I季末の n_I 時点における状態確率は,その初期確率ベクトル $\mathbb{P}_0^{(I)}$ および推移確率行列 $\mathbb{P}_I$ によって次式で表わせる。ただし,(7),(8)式では簡単のため I を省略している。

$$\mathbb{P}_{n_I} = \mathbb{P}_0^{(I)}\cdot\mathbb{P}_I^{n_I} \quad (\,\mathbb{P}_I^{n_I}:\text{ベクトル}\,\mathbb{P}_I\,\text{の}\,n_I\,\text{回のベクトル積}\,) \tag{6}$$

$$\mathbb{P}_I = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdot & k-m-1 & k-m \\ \hline 0 & G_m & g_{m+1} & g_{m+2} & \cdot & g_{k-1} & h_k \\ 1 & G_{m-1} & g_m & g_{m+1} & \cdot & g_{k-2} & h_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m & G_0 & g_1 & g_2 & \cdot & g_{k-m-1} & h_{k-m} \\ m+1 & 0 & g_0 & g_1 & \cdot & g_{k-m-2} & h_{k-m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k-m & 0 & 0 & 0 & \cdot & g_{m-1} & h_m \end{array} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} G_j &= \sum_{i=0}^{j} g_i \\ h_j &= \sum_{i=j}^{\infty} g_i \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

さて,年間での季節的変化を考える期間を順に II, III, $\cdots$, S とし,各季節内ではそれぞれ $n_{II}, n_{III}, \cdots, n_S$ の間隔に分けられているとすれば,単純マルコフ連鎖の性質により,年間をサイクルとしてもとの状態にもどるとして,次式が得られる。

$$\mathbb{P}_{n_I+n_{II}} = \mathbb{P}_0^{(I)}\cdot\mathbb{P}_I^{n_I}\cdot\mathbb{P}_{II}^{n_{II}}, \quad \cdots\cdots, \quad \mathbb{P}_0^{(I)} = \mathbb{P}_0^{(I)}\cdot\mathbb{P}_I^{n_I}\cdot\mathbb{P}_{II}^{n_{II}}\cdots\mathbb{P}_S^{n_S}$$

ところで,正則なマルコフ過程 $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_0\mathbb{P}^n$ では, $n\to\infty$ のとき, $\mathbb{P}_0$ に無関係に $\mathbb{P}_n$ がある確定した極限ベクトル w に収束し,それは $w\mathbb{P}=w$ を満たす行ベクトルとして与えられるという定理がある。よって,第I季における定常確率の要素 $w_i^{(I)}$ は,次式の解として求まる。

$$w^{(I)} = w^{(I)}\mathbb{P}_I, \quad w^{(I)} = (w_0^{(I)}, w_1^{(I)}, \cdots, w_{k-m}^{(I)}), \quad \sum_{i=0}^{k-m} w_i^{(I)} = 1 \tag{9}$$

したがって,第II, III, $\cdots$ 季の初期における貯水量の定常確率は次式で求められる。

$$w^{(II)} = w^{(I)}\mathbb{P}_I^{n_I}, \quad w^{(III)} = w^{(II)}\mathbb{P}_{II}^{n_{II}}, \quad \cdots \tag{10}$$

これらの解は,貯水量生起に関する定常確率密度であるが,その非超過確率はある貯水量以下の w_i の和として求められる。なお,実際河川への適用および応用については講演時に述べる。

参考文献

1) 長尾正志, 瀬古育二, "自己相関からみた河川流出量の性格について," 第22回土木学会年次学術講演会概要, pp 13-1~2
2) N.U. Prabhu, "Queues and Inventories, Chap. 6 Moran's Model for the Dam," pp 191~205, John Wiley & Sons.