不規則外力による多自由度系の応答について

京都大学工学部 正員 山田善一
京都大学大学院 学生員 ○竹宮宏和

§1 まえがき

多自由度系構造物が地震波のような不規則外力を受けた際，その応答を確率論的に処理しようとする方法は他にも試みられているが，本論文においても receptance の概念を導入し，外力の非定常入力波の基に線形多自由度系の応答を取扱うものである。

§2 解析法

系のreceptance；多自由度系の線形強制振動に関する運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = -[M]\{\ddot{z}_0\} \qquad (1)$$

いま，$\{x\}=\{\Phi\}e^{i\omega t}$，$-[M]\{\ddot{z}_0\}=\{\Psi\}e^{i\omega t}$ とおくと上式から

$$(-[M]\omega^2 + i[C]\omega + [K])\{\Phi\} = \{\Psi\}$$

この連立方程式より，多自由度の receptance は一般に

$$H_{rs} = (-1)^{r+s}\Delta_{rs} / \Delta \qquad (2)$$

但し，Δ は $\{\Phi\}$ の係数によって作られる行列式の det. を，Δ_{rs} は a_{rs} の余因子の det. を意味する。また系の固有振動数は $\Delta=0$ より求められる。

地震動；地震記録の観察より，地動加速度は次の形で表わせ得る。

$$\ddot{f}(t) = \varphi(t)g(t) \qquad (3)$$

上式で $\varphi(t)$ は，$\varphi(\infty)=0$ なる deterministic な関数で，入力波を非定常ならしめるものである。

$$\varphi(t) = (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})H(t)$$

$g(t)$ は，平均値0のGauss分布をなす定常random関数と仮定する。従ってそのcovarianceは

$$\left.\begin{aligned}
E\{g(t)g(s)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{i\omega(t-s)}d\omega \\
E\{\dot{g}(t)g(s)\} &= -E\{g(t)\dot{g}(s)\} = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\Phi(\omega)e^{i\omega(t-s)}d\omega \\
E\{\dot{g}(t)\dot{g}(s)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\Phi(\omega)e^{i\omega(t-s)}d\omega
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

また，入力波に地盤特性を介入させるため，$g(t)$ は次の微分方程式を有する系の応答と考えるのである。

$$\ddot{g}(t) + 2\mu_\nu\dot{g}(t) + (\omega_\nu^2+\mu_\nu^2)g(t) = n(t)$$

$$E\{n(t)n(s)\} = D\,\delta(t-s)$$

ここで D は white noise の値を意味する。従って，地盤の周波数特性は

$$H(\omega) = (\omega_\nu^2+\mu_\nu^2-\omega^2-i2\mu_\nu\omega)/(\omega_\nu^2+\mu_\nu^2-\omega^2+4\mu_\nu^2\omega^2)$$

系の応答；構造物の変位応答は，線形性の仮定から

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^{N} y_{ji}(t) \qquad (5)$$

$y_{ji}(t)$ は，i質点にのみ外力が作用した際のj質点の変位応答を示すもので，重み関数 $h_{ji}(\tau)$ を介して次式で定義される。 $y_{ji}(t) = \int_0^\infty h_{ji}(\tau)x_i(t-\tau)d\tau$

さらに Fourier 変換により

$$Y_{jl}(\omega) = H_{jl}(\omega)\, X_l(\omega) \qquad (5')$$

こゝに云う $H_{jl}(\omega)$ は，前に述べた receptance を意味することゝなる。よって，全外力による j 質点の変位応答は

$$Y_j(\omega) = \sum_{l=1}^{N} Y_{jl}(\omega) = \sum_{l=1}^{N} H_{jl}(\omega) X_l(\omega)$$

各質点の変位応答の自己相関関数は

$$\left.\begin{aligned} R_{y_j}(\tau) &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty h_{jl}(\xi) h_{jm}(\eta) R_{lm}^{a}(\xi-\eta+\tau)\, d\xi\, d\eta \\ R_{lm}^{a}(\tau) &= E\{M_l M_m \ddot{f}(t) \ddot{f}(t+\tau)\} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(　) 式を Fourier 変換して変位応答の power spectrum は

$$\left.\begin{aligned} S_{y_j}(\omega) &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} H_{jl}^{*}(\omega) H_{jm}(\omega) S_{lm}^{a}(\omega) \\ S_{\dot{y}_j}(\omega) &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} H_{jl}^{*}(\omega) H_{jm}(\omega) S_{lm}^{v}(\omega) \\ S_{y_j\dot{y}_j}(\omega) &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} H_{jl}^{*}(\omega) H_{jm}(\omega) S_{lm}^{av}(\omega) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

同様にして

式 (7-a), (7-b), (7-c) において，S_{lm}^{a}, S_{lm}^{v}, S_{lm}^{av} は入力波自身の power spectral を表わす。これらは以前の入力波の仮定より算出されるが，こゝでは紙面の関係上記載することを割愛する。以上のことより、非定常 random 入力波を受ける線形多自由度系構造物の各質点に関する power spectrum を直接計算でき，確率論的に構造物の動的挙動を処理していく事が可能となる。すなわち，これらの power spectrum を Fourier 逆変換して $\tau=0$ とおくと

$$R_{y_j}(0) = \sigma^2(y_j) = \sigma_1^2, \quad R_{\dot{y}_j}(0) = \sigma^2(\dot{y}_j) = \sigma_2^2, \quad R_{y_j\dot{y}_j}(0) = \sigma^2(y_j\dot{y}_j) = \sigma_{12}$$

であるから，構造物破壊に対する安全性を次の2式で検討できる。

$$P_u(y, \Delta) = 2\int_0^\infty h^{*}(\tau)\, d\tau \qquad (8)$$

$$h^{*}(\tau) = \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1}\left[(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right\} + \delta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\rho\frac{\lambda}{\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sigma_1}\right)^2\right\}\right]$$

$$P_l(y, \Delta) = 2\left[1 - \Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma_1}\right)\right] \qquad (9)$$

$$\Phi_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} \exp(-u^2)\, du$$

こゝで，$\rho = \sigma_{12}/\sigma_1\sigma_2$ で，$\rho > 0$ なら $\delta = 1$，$\rho \leq 0$ なら $\delta = 0$ とする。

(8), (9) 式における P_u, P_l は，限界変位に対する構造物の安全性に関する上限値及び下限値を与えるものである。

参考文献；

E;Heer; Coupled Systems Subjected to Determinate and Random Input, Int. J. Solids Structures, 1967, Vol. 3

Bishop; Mechanical Vibration

M.Shinozuka; Response of a Multi-Story Building to Random Excitation