

地盤中の楕円形断面基礎の振動について

京都大学工学部 正員 後藤 尚男
 京都大学工学部 正員 土岐 憲三
 京都大学工学部 正員 〇秋吉 卓

1. まえがき これまで地中に埋設されている橋脚の耐震設計については種々の研究がなされてきている。特に埋設構造物の断面形が円形の場合は理論的な取扱いも試みられてきた¹⁾。しかし、実際に打設される構造物基礎は円形とは限らず、また円形以外の構造物の地震応答はその断面形によっても異なうことが考えられる²⁾。そこでここでは、図-1のように構造物基礎が楕円形断面を持つ場合の地震応答について、円形断面の場合と同様な手法を用いて解析を進めた。この場合、簡単のため地震動を正弦波とみなし、ロッキング振動のみを対象とした。

2. 運動方程式とその解 解析を進めるにあたって次の仮定を行なう。地盤を等方均質な弾性体と考え、上下方向の変位は水平方向の変位に比べて小さいとしてこれを省略する。また基礎は $e \cdot e^{i\omega t}$ なる正弦振動をなし、減衰を無視すると、短軸方向の地盤に関する運動方程式は楕円筒座標で次のように書ける。

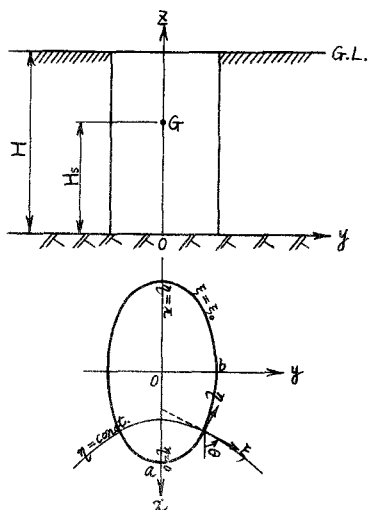


図-1 地盤と楕円形断面基礎のモデル

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (e u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (e u_\eta) \right\} - \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (e u_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (e u_\xi) \right\} + \mu \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi^2} = \rho \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial t^2} - \rho e \omega^2 e^{i\omega t} \frac{k \cosh \xi \sin \eta}{l} \quad \text{----- (1)}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (e u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (e u_\eta) \right\} + \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (e u_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (e u_\xi) \right\} + \mu \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial \eta^2} = \rho \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} - \rho e \omega^2 e^{i\omega t} \frac{k \sinh \xi \cos \eta}{l} \quad \text{----- (2)}$$

ここに、 $l = \sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} / \sqrt{2}$ 、 λ, μ : Lamé の定数、 ρ : 地盤の密度、 e : 基礎の最大振幅、 $k = \sqrt{a^2 - b^2}$ 、 a, b : 楕円形断面の長径と短径、 u_ξ, u_η : ξ と η 方向の変位。

式 (1), (2) の一般解として $z = H$ (地表面) で、 $\tau_{z\xi} = \tau_{z\eta} = 0$ を満足するように z 方向にフーリエ級数に展開して次の結果を得る。

$$u_\xi = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{l} \left\{ C N_m^{\omega}(\xi, \eta_1) \operatorname{se}_1(\eta, \eta_1) - D M_m^{\omega}(\xi, \eta_2) \operatorname{ce}_1(\eta, \eta_2) - \frac{4e_0 k \cosh \xi \sin \eta}{m\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad \text{----- (3)}$$

$$u_\eta = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{l} \left\{ C N_m^{\omega}(\xi, \eta_1) \operatorname{se}_1(\eta, \eta_1) + D M_m^{\omega}(\xi, \eta_2) \operatorname{ce}_1(\eta, \eta_2) - \frac{4e_0 k \sinh \xi \cos \eta}{m\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad \text{----- (4)}$$

ここに、 $M_m^{\omega}(\xi, \eta_2)$ 、 $N_m^{\omega}(\xi, \eta_1)$ は変形マシユ関数、 $\operatorname{ce}_1(\eta, \eta_2)$ 、 $\operatorname{se}_1(\eta, \eta_1)$ はマシユ関数で、それらにグマシユを付したものは、その微分形である。 C, D : 積分定数、 $\omega_g = v_c \cdot \pi / 2H$ 、

$$\xi_m^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 - m^2, \quad \eta_1 = \frac{k^2}{4} \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \left(\frac{v_c}{v_s} \right)^2 \xi_m^2, \quad \eta_2 = \frac{k^2}{4} \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \xi_m^2, \quad v_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad v_c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

このとき、応力 σ 、 τ と変位 u との関係は

$$\sigma_z = \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (e u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (e u_z) \right\} + 2\mu \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_z}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad \tau_{rz} = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_r}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_z}{z} \right) \right\}$$

であるから、高さ方向単位長さ当りの楕円柱にかかる土による全振動圧 F は

$$F = \oint (\sigma_z \sin \theta + \tau_{rz} \cos \theta) ds = \int_0^{2\pi} (a \sin \eta \cdot \sigma_z + b \cos \eta \cdot \tau_{rz}) d\eta$$

$$= - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \rho \pi \omega_j^2 \xi_m^2 \left\{ C \cdot a B_1^{(0)} N_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1) + D \cdot b A_1^{(0)} M_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1) \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad \text{----- (5)}$$

これより地盤表層の振動により引き起されるモーメント M は

$$M = \int_0^H F \cdot z dz = - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \rho \pi \omega_j^2 \xi_m^2 \left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left\{ C \cdot a B_1^{(0)} N_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1) + D \cdot b A_1^{(0)} M_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1) \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad \text{----- (6)}$$

しかして、積分定数 C 、 D は剛基礎体の変位と地盤の変位との連続条件より求められる。

一方、剛基礎体の総質量を m_0 、その重心の基礎からの高さ H_0 、底面中心線(z 軸)周りの慣性モーメントを I 、底面のロッキングのばね定数を k_r とすると、この剛体の運動方程式は次のように書ける。

$$I \ddot{\varphi} + k_r \varphi = m_0 e \omega^2 H_0 e^{i\omega t} + M \quad \text{----- (7)}$$

いま式(7)の解を $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$ とすると

$$\varphi_0 = \frac{m_0 H_0 - \frac{16ab\rho H^3}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \Omega_m}{k_r - I\omega^2 + \frac{32ab\rho H^3}{\pi^2} \omega_j^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \xi_m^2 \frac{\Omega_m}{m^4}} e_0 \omega^2 \quad \text{----- (8)}$$

ところで

$$\Omega_m = \frac{\frac{a}{b} (B_1^{(0)})^2 \frac{M_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)}{M_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)} + \frac{b}{a} (A_1^{(0)})^2 \frac{N_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)}{N_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)} - 2 A_1^{(0)} B_1^{(0)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(0)} B_{2r+1}^{(0)}}{\frac{M_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)}{M_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)} \frac{N_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)}{N_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(0)} B_{2r+1}^{(0)} \right)^2} \quad \text{----- (9)}$$

かくして、剛体の頂部における振幅の増幅率 K は次のように求まる。

$$K = \left| \frac{\varphi_0 H + e_0}{e_0} \right| = \left| 1 + \frac{m_0 H H_0 - \frac{16ab\rho H^3}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \Omega_m}{\frac{k_r}{\omega_j^2} - I \left(\frac{\omega}{\omega_j} \right)^2 + \frac{32ab\rho H^3}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \xi_m^2 \frac{\Omega_m}{m^4}} \left(\frac{\omega}{\omega_j} \right)^2 \right| \quad \text{----- (10)}$$

ただし、 $(\omega/\omega_j)^2 - m^2 < 0$ のときは $M_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)$ 、 $N_{e1}^{(0)}(\xi_1, \eta_1)$ のかわりに、それぞれ $F_{ek1}(\xi_1, -\eta_1)$ 、 $G_{ek1}(\xi_1, -\eta_1)$ を用いる。

以上は短軸方向に振動する場合についての解析であるが、長軸方向の振動のときは η_1 、 η_2 の値を互に入れ換えることによって同様の取扱いができる。数値計算結果については講演時に述べる予定である。

1) 田治見 宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学会シンポジウム（1966）。

2) 小坪 清真：楕円形水中橋脚に働く地震力，九大工学集報，第37巻，第3号，昭39。