I ～ 13

立体ラーメンの静的解析におけるネットワーク・トポロジーの応用

京都大学工学部　正員　　工博　小西一郎
京都大学工学部　正員　　工博　白石成人
京都大学工学部　学生員　工修○玉村三郎

1．まえがき

複雑な骨組構造物を電子計算機を用いて解析する場合，必要な記憶容量を減少させ，計算能率を向上させるために如何なる計算法を用いるかが問題となる。骨組のもつトポロジー的性質はこの計算法を導くために重要な手がかりとなる[1]。著者らは，すでに，変形節点接続行列を用いて立体ラーメンの新しい計算法を導いたが[2]，本研究は，計算能率を向上させるために，この計算法に改良を加えたものである。

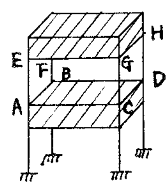
2．基本式とその解法

支点沈下，温度変化による項を考えない場合，変形法による基本式は[2]

$$\mathbb{D} = (\mathbb{A}^t K \mathbb{A})^{-1} \mathbb{P} \qquad (1)$$

ここで　$\mathbb{D}$：節点変位，$\mathbb{P}$：節点荷重

$\mathbb{A}$：変形節点接続行列，K：各部材のStiffness Matrix



第1図

$(\mathbb{A}^t K \mathbb{A})^{-1}$を求めるために，立体ラーメンを一般にn個の部分に分割する。

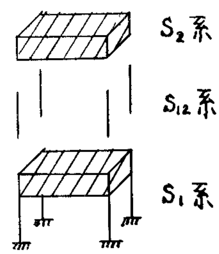
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \\ A_n \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & K_n \end{bmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$(\mathbb{A}^t K \mathbb{A})^{-1} = \left(\sum_i^n (A_i^t K_i A_i) \right)^{-1} \qquad (2)$$

第(2)式に Householderの式[3]

$$(\mathbb{Z} + A_i^t K_i A_i)^{-1} = \mathbb{Z}^{-1} - \mathbb{Z}^{-1} A_i^t (A_i \mathbb{Z}^{-1} A_i^t + K_i^{-1})^{-1} A_i \mathbb{Z}^{-1} \qquad (3)$$

を繰返し適用すれば，解式がえられるわけで，この場合，どのように分割するかが問題となる。



第2図

今，第1図の如き立体ラーメンを第2図のように分割すると

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_1 , & 0 \\ C_1 , & C_2 \\ 0 , & A_2 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_{12} & \\ 0 & & K_2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbb{A}^t K \mathbb{A})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} A_1^t K_1 A_1 + C_1^t K_{12} C_1 , & 0 \\ 0 , & C_2^t K_{12} C_2 + A_2^t K_2 A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_2^t \end{bmatrix} [K_{12}] [C_1 , 0] + \begin{bmatrix} C_1^t \\ 0 \end{bmatrix} [K_{12}] [0 , C_2] \right)^{-1} \qquad (4)$$

上式，括弧内の第1項は，次頁第3図に示す，互いに独立した$\bar{S}_1$系，$\bar{S}_2$系に関するものである。

第(4)式に第(3)式を繰返し適用すると

$$(A^tKA)^{-1}=\begin{bmatrix}F_1, 0\\ 0, F_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-[Z_b, Z_a]^t d_1 [Z_b, Z_a], & [Z_b, Z_a]^t d_2 [Z_h, Z_g]\\ [Z_h, Z_g]^t d_2^t [Z_b, Z_a], & -[Z_h, Z_g]^t d_3 [Z_h, Z_g]\end{bmatrix} \cdots (5)$$

ここで

$F_1=(A_1^t K_1 A_1 + C_1^t K_{12} C_1)^{-1}=\begin{bmatrix}Z_d & Z_c\\ Z_b, & Z_a\end{bmatrix}$　$\bar{S}_1$系のFlexibility Matrix

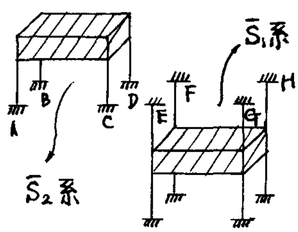
$F_2=(C_2^t K_{12} C_2 + A_2^t K_2 A_2)^{-1}=\begin{bmatrix}Z_h, & Z_g\\ Z_f & Z_e\end{bmatrix}$　$\bar{S}_2$系の　〃　〃

$$K_e=(K_{12}^{-1}-C_2 Z_h C_2^t K_{12} C_1 Z_a C_1^t)^{-1} \qquad (6)$$

$$d_2 = C_1^t K_e C_2, \quad d_{12}=C_2^t K_{12} C_1 \qquad (7)$$

$$d_1 = d_2 \cdot Z_h \cdot d_{12} \qquad (8)$$

$$d_3 = d_{12}^t Z_a \cdot d_2 \qquad (9)$$



第3図

K_e, d_1, d_3 を上式のように、まとめることができるので、参考文献(2)の計算法に比べて、計算回数が少なく、記憶容量も減少させることができるのである。
第(5)式から節点変位を求めると

$$\left.\begin{aligned}D_1 &= \bar{D}_1 + Z_c (d_2 Z_h d_{12} \bar{D}_1^* - d_2 \bar{D}_2^*)\\ D_1^* &= \bar{D}_1^* + Z_a (\quad〃\quad〃\quad)\\ D_2^* &= \bar{D}_2^* + Z_h (-d_2^t \bar{D}_1^* + d_{12}^t Z_a d_2 \bar{D}_2^*)\\ D_2 &= \bar{D}_2 + Z_f (\quad〃\quad〃\quad)\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

ここで　$\bar{D}_1$は$\bar{S}_1$系に外力を加えた場合の変位
添字は系番号、
＊印は分割点 A,B,C、H を意味する。

第(10)式から、$\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$系の節点変位を使って、第1図の如き立体ラーメンの節点変位を求めることができる。

3. 結言

(1) 計算能率をあげ、記憶容量を減少させるように、計算法の改良を行なった。
(2) 与えられた立体ラーメンを分割してえられる部分構造物の独立した解析結果から全体の解を求めることができる。
(3) 第(5), (10)式を繰返し用いることにより、系を拡大していくことができる。

参考文献

1. F. L. DiMaggio & W. R. Spiller "Network Analysis of Structures", E.M. Proc. ASCE Vol 91 (1965) Jun. pp. 169 — 188
2. 小西, 白石, 玉村 "立体ラーメンの静的解析におけるネットワーク・トポロジーの応用" 土木学会第22回年次学術講演会 講演概要 I−43, 1967
3. A. S. Householder " A Survey of Some Closed Method for Inverting Matrices" Journal of Soc. of Ind. and Appl. Math. Vol. 5 No. 3, 1957. Sept. pp 155 − 170