曲線桁橋の曲げ捩り理論に関する研究

京都大学工学部　正　員　小西一郎
京都大学工学部　正　員　白石成人
京都大学工学部　正　員○神部俊一

1. まえがき

曲げ捩れに於ける垂直応力の計算に、St. Venant の捩れによるそりだけを考え、その垂直応力の変化に伴なう剪断応力によるそりを無視した従来の曲げ捩り理論をそり変形の拘束の大きい箱桁に適用するのは両者の剪断変形の大きさが同程度であるから妥当でないと云われている。曲線橋の場合、直線橋に比べて捩りモーメントが大きくなるので、以上の点を改良した理論により計算することが望ましいと考えられる。

従来の理論では、捩り率が一定でない場合のそり変位Uを捩り率が軸線に沿って一定という仮定のもとで求められた断面上の分布を示す関数、いわゆるSt Venant のそり関数$w(s)$と、その位置での捩り率$\varphi'_x(\theta)$との積で表わしているが、ここでは$w(S)$は保存し$\varphi'_x(\theta)$の代りにθの或る関数$\chi(\theta)$との積と仮定する。[(1),(2)]

$$U = -w(S)\chi(\theta) \qquad (1)$$

座標原点を剪断中心にすると曲げ捩りモーメントM_wは

$$M_w \equiv \int_F \sigma_0 w \, dF = -E\frac{1}{R}\frac{d\chi}{d\theta} R\int_F \frac{w^2}{\rho} dF = -EC_w \frac{1}{R}\frac{d\chi}{d\theta} \qquad (2)$$

従って曲げ捩りにより生ずる垂直応力$\sigma_{\theta w}$は

$$\sigma_{\theta w} = E\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -E\frac{w}{\rho}\frac{d\chi}{d\theta} = R\frac{w}{\rho}\frac{M_w}{C_w} \qquad (3)$$

曲げ捩れによる垂直応力$\sigma_{\theta w}$と二次剪断流q_wとの平衡条件式は

$$t\frac{\partial \sigma_{\theta w}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}(\rho^2 q_w) = 0 \qquad (4)$$

q_wをq_wにより生ずる捩りモーメントT_wで表わす為にGalerkin法を適用する。(4)式にwを乗じて全断面積にわたって積分し(3)式を考慮すると

$$\int_F \left\{ \frac{R}{\rho} w t \frac{1}{C_w}\frac{dM_w}{d\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}(\rho^2 q_w) \right\} w\, ds = 0 \qquad (5)$$

次に曲げ捩れによる垂直応力の変化に伴なう剪断応力による閉じた断面のそりの連続条件式およびSt. Venantの捩り関数$\tilde{q}_s$が断面の各壁で一定である[(3)]ことを考慮すると次の直交条件式が成立する。

$$\int_F (\Phi - S_w)\tilde{q}_s \frac{1}{\rho^3}\cdot\frac{1}{t} dS = 0 \qquad (6)$$

ここに

$$S_w = \int_0^s w\, dF \quad , \quad \Phi = \frac{C_w}{T_w}\tilde{q}_w$$

(5)式を部分積分し、(6)式を考慮すると

$$q_\omega = \frac{T_\omega}{C_\omega}\frac{R^2}{\rho^2}(\Phi - S_\omega) \quad \text{------------(7)}$$

よって全剪断流 q は St Venant の剪断流 q_s とそれによる捩りモーメント T_s との間の既知の関係式と上式とから

$$q = q_s + q_\omega = \frac{T_s}{J_T}\frac{R^2}{\rho^2}\tilde{q}_s + \frac{T_\omega}{C_\omega}\frac{R^2}{\rho^2}(\Phi - S_\omega) \quad \text{------(8)}$$

さらに T_ω と M_ω との次の関係式を得る

$$\frac{dM_\omega}{d\theta} - RT_\omega = 0 \quad \text{---------(9)}$$

次に T_ω と変位との関係を求める為に principle of complementary virtual work を適用する。

$$\delta\left(\Pi_i + \Pi_a + \sum_{i=1}^{7}\lambda_i G_i\right) = 0 \quad \text{----------------(10)}$$

ここに λ_i は Lagrange の未数，G_i は断面力 N. Q_y. Q_z. 断面モーメント T. M_y. M_z に関する6個の平衡条件式と(9)式の計7個の附帯条件式である。 Π_i は内力仕事，Π_a は外力仕事で各々次のように表わせる。

$$\delta\Pi_i = \iint \frac{\sigma_\theta \delta\sigma_\theta}{E}\rho\, d\theta\, dF + \iint \frac{q\delta q}{GT}\rho\, d\theta\, dF$$

$$\delta\Pi_a = -\int(\tilde{u}\delta\sigma_\theta + \tilde{v}\delta\gamma_{\rho\theta} + \tilde{w}\delta\gamma_{\theta z})dF - \int(u\delta q_x + v\delta q_y + w\delta q_z + \Omega_x\delta m_x + \Omega_y\delta m_y + \Omega_z\delta m_z)R\, d\theta \quad \text{--(11)}$$

既知の平衡条件式および垂直歪 ϵ_θ. 剪断歪 $\gamma_{\rho\theta}$. $\gamma_{\theta z}$ 各座標軸周りの回転角 Ω_x. Ω_y Ω_z. に関する既知の関係式と(8)式を(10)式に代入し(6)式を考慮すると次の関係式を得る。

$$T_s = GJ_T\psi_x \quad \text{-------(12)} \qquad T_\omega = \gamma GJ_T(\psi_x - \chi) \quad \text{------(13)}$$

ここに

$$\frac{1}{\gamma} = R^3\frac{J_T}{C_\omega^2}\int_F(\Phi - S_\omega)^2\frac{1}{\rho^3}\frac{ds}{t} \quad \text{-----(14)}$$

よって

$$T = T_s + T_\omega = (1+\gamma)GJ_T\psi_x - \gamma GJ_T\chi \quad \text{------(15)}$$

(2).(9)(13) 式から

$$EC_\omega\frac{1}{R^2}\frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \gamma GJ_T(\psi - \chi) = 0 \quad \text{------(16)}$$

(2).(15)(16)式から

$$\frac{d^2M_\omega}{d\theta^2} - R^2\frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{GJ_T}{EC_\omega}M_\omega = R\frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{dT}{d\theta} = -R\frac{\gamma}{1+\gamma}(M_y + Rm_x) \quad \text{--------(17)}$$

外力として鉛直荷重 q_z と捩りモーメント m_x だけを考えると陪法線周りのモーメント M_z は零であるから歪 変位. 断面力相互間の既知の関係式から以下の方程式を得る。

$$\frac{d^2M_y}{d\theta^2} + M_y = -R(m_x + Rq_z) \quad \text{-----(18)} \qquad \frac{d^2w}{d\theta^2} = R^2\frac{J_z M_y}{E(J_yJ_z - J_{yz}^2)} - R\varphi \quad \text{-------(20)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \varphi = -R\left\{\frac{1}{GJ_T} + \frac{J_z}{E(J_yJ_z - J_{yz}^2)}\right\}M_y - \frac{1}{GJ_T}\frac{d^2M_\omega}{d\theta^2} - \frac{R^2}{GJ_T}m_x \quad \text{-----------(19)}$$

両端が単純支持の場合,上記の方程式は容易に解ける。 たわみ w. 軸線の回転角 φ が分ると捩り率 ψ_x が求まり(12)式から T_s が求まる。 M_ω が分ると(9)式より T_ω が求まる。

参考文献

(1) S.U. BENSCOTER. A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams ; J Appl. Mech. 3.1954

(2) R.Heilig; Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform DER STAHLBAU 11/1961

(3) 小西.小松 薄肉曲線桁の基礎理論 土木学会論文集 才87号